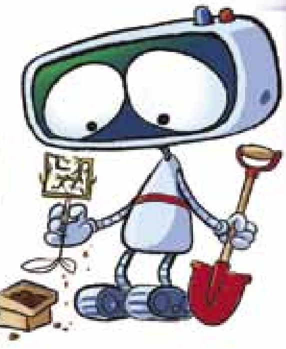
Глеб Погудин

КАК НАЙТИ КВАДРАТНЫЙ КОРЕНЬ?



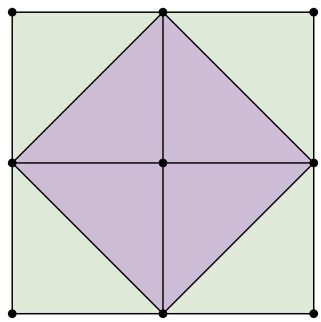
Такие арифметические действия, как сложение, вычитание, умножение и деление, вы наверняка уже давно освоили и при желании можете провести их без помощи калькулятора. Однако в арсенале математика есть ещё несколько операций с числами. Об одной из них – о квадратном корне – и пойдёт речь в этой статье.

По определению, *арифметическим квадратным корнем* из числа x называется такое положительное число y, что $y \cdot y = y^2 = x$ (говорят, что «y в квадрате равен x»). Обозначают это так: $y = \sqrt{x}$. Вычислить корень (или, как говорят, *извлечь корень*) из некоторых чисел легко, вспомнив таблицу умножения: $\sqrt{4} = 2$, $\sqrt{9} = 3$ и так далее.

Квадратный корень удобно представлять себе следующим образом. Пусть есть квадрат с площадью a см², тогда его сторона равна $\sqrt{a}$ см. И правда, ведь если сторона квадрата $\sqrt{a}$ см, то его площадь будет равна $\sqrt{a} \cdot \sqrt{a} = a$ см². Поскольку у большего квадрата и сторона длиннее, то сразу получаем очень важный для нас факт:

если $a > b$, то $\sqrt{a} > \sqrt{b}$.

Рассмотрим четыре рядом стоящих одинаковых квадратика со стороной 1 (1 см, 1 дюйм, 1 м – это всё равно).



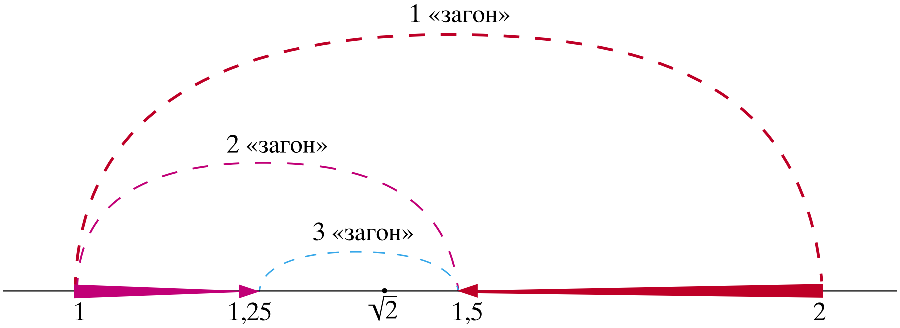
Большой квадрат состоит из восьми одинаковых треугольничков, а синий квадрат – из четырёх

Очевидно, что синяя фигура – квадрат. Его площадь равна половине площади большого квадрата, то есть $\frac{4}{2} = 2$. Если сторона заштрихованного квадрата y, то $y \cdot y = 2$, значит, $y = \sqrt{2}$.

Калькулятор говорит, что $\sqrt{2} = 1{,}41421356\ldots$ Многоточие означает, что цифры после запятой продолжаются до бесконечности. Как же калькулятор мог получить этот ответ? Сейчас расскажем.

Основная идея состоит в том, чтобы зажать $\sqrt{2}$ между числом, меньшим его, и числом, большим его (то есть поместить его в «загон»), а потом постепенно этот «загон» сужать. Так как $1 < 2 < 4$, мы можем утверждать, что $1 < \sqrt{2} < 2$. Для сужения «загона» воспользуемся *методом деления пополам* (или, научно говоря, *дихотомией*). А именно, разделим отрезок между 1 и 2 пополам – получим два возможных «загона» $[1; 1{,}5]$ и $[1{,}5; 2]$. Искомый $\sqrt{2}$ будет находиться в одном из

них. Так как $1{,}5^2=2{,}25>2$, то $1<\sqrt{2}<1{,}5$; значит, $\sqrt{2}$ лежит в «загоне» $[1;\,1{,}5]$. Снова поделим отрезок пополам – получим два возможных «загона»: $[1;\,1{,}25]$ и $[1{,}25;\,1{,}5]$. Потом выясним, в какой из половин лежит $\sqrt{2}$ (так же, как и в прошлый раз, сравнив $1{,}25^2$ и 2). И так далее... Будем всё ближе подбираться к $\sqrt{2}$.



Получаем I инструкцию по вычислению $\sqrt{2}$:

1. *Пусть мы уже знаем, что* $\sqrt{2}$ *находится в «загоне»* $[a;\,b]$.

2. *Находим его середину* $\frac{a+b}{2}$ *– она будет одним из концов нового «загона».*

3. *Если* $\left(\frac{a+b}{2}\right)^2>2$, *то новым «загоном» будет* $\left[a;\,\frac{a+b}{2}\right]$, *а если же неравенство в другую сторону, то* $\left[\frac{a+b}{2};\,b\right]$.

4. *Если «загон» все ещё кажется слишком широким, идём к пункту* 1. *Иначе выдаём в качестве ответа середину «загона».*

Способ вычисления $\sqrt{2}$ вроде бы придумали. Но когда мы примерно вычисляем что-либо, нас всегда интересует, насколько сильно мы можем ошибаться. Только что мы подсчитали, что $1<\sqrt{2}<1{,}5$. А это означает, что если мы скажем, что $\sqrt{2}=1{,}25$, то ошибёмся не более чем на 0,25. В таком случае 1,25 называют приближённым значением, а 0,25 – погрешностью. Чем меньше погрешность, тем точнее вычисления. Сколько же раз надо проделать деление пополам (будем называть его *шагом*), чтобы погрешность стала меньше, например, одной сотой? Заметим, что погрешность равна попросту половине длины «загона». А эта длина, в свою очередь, каждый раз уменьшается вдвое. Значит после n шагов погрешность будет равна $\frac{1}{2}\cdot\underbrace{\frac{1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{1}{2}}_{n\text{ штук}}$. Чтобы это число стало меньше одной сотой, достаточно взять $n=6$.

На самом деле количество шагов можно сильно уменьшить. Пускай есть два числа $a>b$ такие, что $ab=2$. Если заменить в левой части этого равенства одно из наших чисел на другое, получим неравенства $aa>2$ и $bb<2$. Извлекая корень, получим $b<\sqrt{2}<a$. Но числа x и $\frac{2}{x}$ как раз такие ($x\cdot\frac{2}{x}=2$). Отсюда следует такой важный вывод:

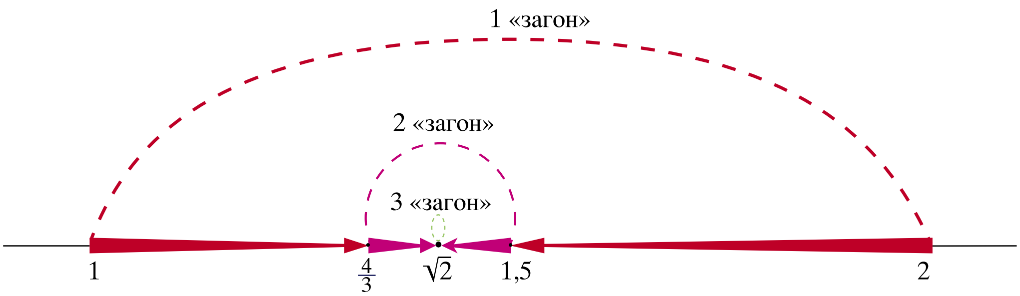
$$\sqrt{2}\ \textit{всегда лежит между}\ x\ \text{и}\ \frac{2}{x}$$

Именно на этом соображении и будет основана модификация нашего способа.

Теперь, выяснив, что $\sqrt{2}$ лежит либо в $[1; 1{,}5]$, либо в $[1{,}5; 2]$, можно не возводить 1,5 в квадрат, а сразу сузить «загон» для $\sqrt{2}$ ещё сильнее: сказать, что $\sqrt{2}$ находится между 1,5 и $\frac{2}{1{,}5}$. При этом мы пока даже не знаем, какое из этих двух чисел больше! Но это, конечно, легко выяснить: $2 : 1{,}5 = 2 : \frac{3}{2} = \frac{4}{3} = 1{,}333\ldots$

Продолжим: у нас есть «загон» $[1{,}333\ldots; 1{,}5]$. Так же, как и раньше, находим его середину: $\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}+\frac{4}{3}\right)=\frac{17}{12}=1{,}4166\ldots$ Аналогично предыдущему шагу, можем заключить, что $\sqrt{2}$ находится между $\frac{17}{12}$ и $\frac{2}{\frac{17}{12}}=\frac{24}{17}=1{,}411764\ldots$

Получили новый «загон» $\left[\frac{24}{17}; \frac{17}{12}\right]$. Его длина равна $\frac{17}{12}-\frac{24}{17}=$ $=0{,}0049\ldots$ И вот уже на втором шаге мы получаем погрешность меньше одной сотой!



Получаем II инструкцию по вычислению $\sqrt{2}$:

1. *Пусть мы уже знаем, что* $\sqrt{2}$ *находится в «загоне»* $[a; b]$.

2. *Находим его середину* $\frac{a+b}{2}$ (*как и в старом способе*) – *она будет одним из концов нового загона.*

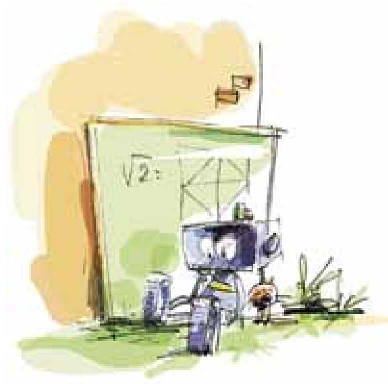
3. *Так как* $\sqrt{2}$ *находится между* $\frac{a+b}{2}$ *и* $\frac{2}{\frac{a+b}{2}}=\frac{4}{a+b}$, *объявляем новым «загоном» отрезок между* $\frac{a+b}{2}$ *и* $\frac{4}{a+b}$.

4. *Если погрешность нас устраивает, выдаём в качестве ответа середину «загона». Погрешность же будет равна половине длины «загона». Если погрешность все ещё слишком большая – идём к пункту* 1.

Теперь вы знаете достаточно, чтобы выполнить:

Упражнение. Найдите $\sqrt{3}$ и $\sqrt{5}$ с погрешностью меньше одной сотой.

Когда вы решите его, сразу поймёте, что теперь можете извлечь квадратный корень почти из чего угодно. Кроме, пожалуй, отрицательных чисел. Но это уже совсем другая история...



Художник Сергей Чуб