Джон Конвей
Владимир Дубровский

НЕЧЁТНЫЕ ЧИСЛА И КВАДРАТЫ

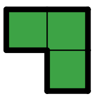
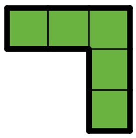
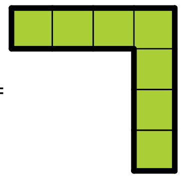
Чему равна сумма первых нескольких нечётных чисел?

$$1 = 1,$$
$$1 + 3 = 4,$$
$$1 + 3 + 5 = 9,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 = 16,$$
$$1 + 3 + 5 + 7 + 9 = 25, \ldots$$

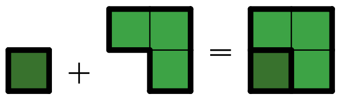
Кажется, получаются точные квадраты:

$$1 = 1 \cdot 1, \qquad 4 = 2 \cdot 2, \qquad 9 = 3 \cdot 3, \qquad 16 = 4 \cdot 4, \qquad 25 = 5 \cdot 5, \ldots$$

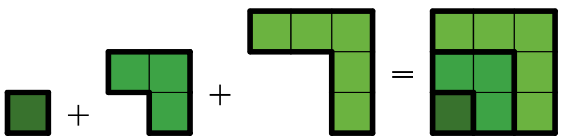
Как же это доказать? Сделаем трюк – представим нечётные числа в таком виде:

$1 =$ ; $3 =$ ; $5 =$ ; $7 =$ ; ...

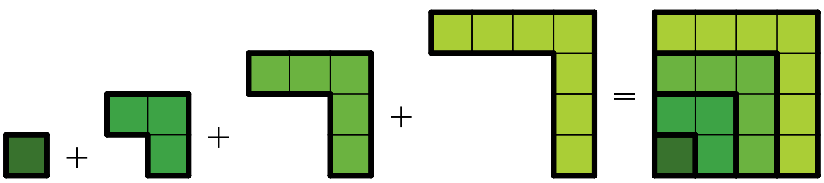
Складывая квадрат из уголков, получаем:



$$1 + 3 = 2^2,$$

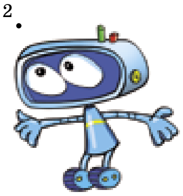


$$1 + 3 + 5 = 3^2,$$



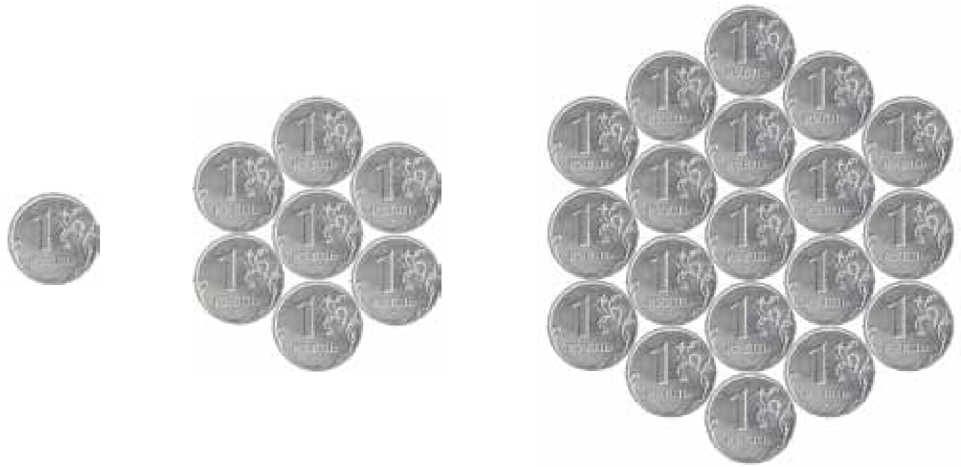
$$1 + 3 + 5 + 7 = 4^2.$$

Аналогично для любого числа n мы доказали, что *сумма первых n нечётных чисел равна числу n^2.*



МОНЕТКИ И КУБЫ

Начнём издалека. Легко выложить из монеток такие шестиугольные фигурки:

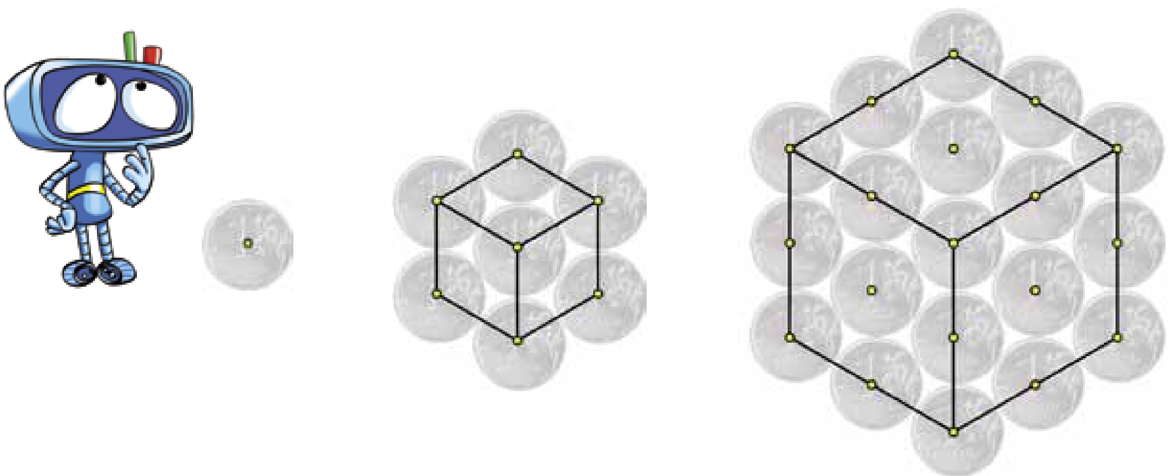


Сложим количества монеток в первых нескольких фигурках:

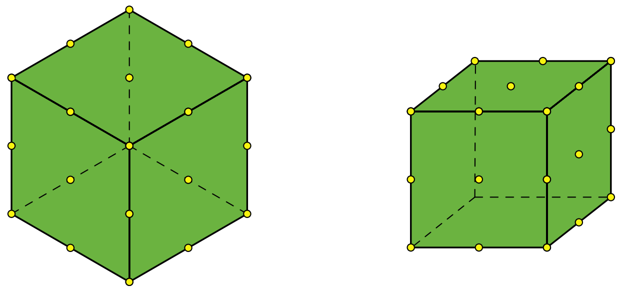
$$1 = 1 = 1 \cdot 1 \cdot 1,$$
$$1 + 7 = 8 = 2 \cdot 2 \cdot 2,$$
$$1 + 7 + 19 = 27 = 3 \cdot 3 \cdot 3, \ \ldots$$

Получаются третьи степени натуральных чисел, то есть точные кубы! Как это объяснить?

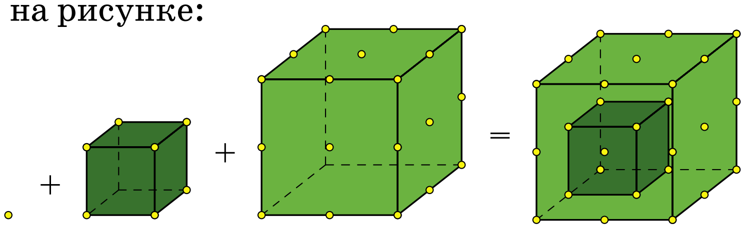
Отметим центры монеток и проведём несколько линий:



Видите передние три грани кубиков? На гранях отмечены точки; каждой точке соответствует монетка. Повернём эти кубики так, чтобы их грани были лучше видны (число точек не изменится):



Чтобы найти суммарное число монеток, подсчитаем суммарное число точек в гранях кубиков. Для этого вложим кубики один в другой, как на рисунке:



Получается один куб, заполненный точками. Количество точек легко найти: если на ребре куба n точек, то всего в кубе их ровно n^3. Значит, именно столько монеток и будет суммарно в первых n шестиугольных фигурках.

ЗАДАЧА

Проверьте справедливость равенств

$$1 = 1^2,$$
$$1+2+1 = 2^2,$$
$$1+2+3+2+1 = 3^2,$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 4^2$$

и докажите утверждение:

$1+2+\ldots+(n-1)+n+(n-1)+\ldots+2+1 = n^2.$