Математический кружок

ЧЁТНОСТЬ

Сергей Дориченко

Однажды два школьника, Андрей и Алёша, развлекались такой игрой. Они одновременно называли по натуральному числу. Потом эти два числа перемножали. Если произведение получалось чётное, то выигрывал Андрей, а если нечётное, то Алёша.

А вы согласились бы играть в эту игру за Алёшу? Если хоть немного подумать, то становится ясно – Андрей будет всегда выигрывать, просто называя чётное число.

Наверное, самая известная задача «на чётность» – это задача о шестерёнках.

1 Одиннадцать шестерёнок соединены по цепочке так, как показано на рисунке. Могут ли они вращаться одновременно?

Прежде чем читать дальше, попробуйте ответить самостоятельно. Чтобы решить задачу, представим себе эти шестерёнки вращающимися. Допустим, первая шестерёнка крутится по часовой стрелке. Тогда вторая вращается против часовой, третья – по часовой стрелке, четвёртая – против, и так далее. Одиннадцатая шестерёнка будет вращаться по часовой стрелке, а значит, первая – против, чего не может быть: мы предположили обратное.

Вот, на первый взгляд, совсем непохожая задача.

2 **а)** По кругу стоят 10 корзин. Можно ли разложить в них несколько арбузов так, чтобы в любых двух соседних корзинах число арбузов отличалось на 1? **б)** А если корзин 15?

Пункт а) решается совсем просто: например, раскладываем в корзины по очереди то 1, то 2 арбуза.

А как решать пункт б)? Ровно такой способ раскладки не подходит, но, может, есть какие-то другие? Оказывается, как ни раскладывай арбузы, выполнить условие не получится. Вспомним задачу 1: в ней любые две соседние шестерёнки вращались в разные стороны. В случае с корзинами тоже можно указать важное отличие соседних корзин: числа арбузов в них разной чётности! Если в одной корзине чётное число арбузов, то в следующей – нечётное, в следующей – снова чётное, и так далее. Начнём с одной из корзин и пройдёмся по кругу – получится, что число арбузов в этой корзине чётное и нечётное одновременно, а так не бывает.

В следующей задаче, казалось бы, чётность совсем ни при чём.

3 Давным-давно барон Мюнхгаузен свои владения обнёс забором и нарисовал на карте. Забор изображён замкнутой несамопересекающейся ломаной, внутри которой – владения барона. Барон забыл, входит ли в его владения деревня Гаузеновка. Он смог найти лишь обрывок карты (см. рисунок на полях), на который попали его дом, деревня Гаузеновка и часть забора, проходящая по этому участку. Выясните, входит ли деревня во владения барона?

Каждый понимает – если перелезешь через забор между двумя дворами, то из одного двора попадёшь в другой. И это всё, что нам понадобится. Проведите на карте путь так, чтобы один его конец был во владениях барона, а другой – в деревне. Отметьте точки этого пути, в которых надо перелезать забор. Мысленно пройдём по этому пути, начав из владений барона. После первого перелезания через забор мы окажемся вне владений, после следующего снова попадём во владения барона, и так далее. Поэтому если число точек перелезания чётно, оба конца пути находятся во владениях барона, а если нечётно – то нет. А сколько точек получилось у вас? Должно было выйти нечётное число, то есть деревня не принадлежит барону.

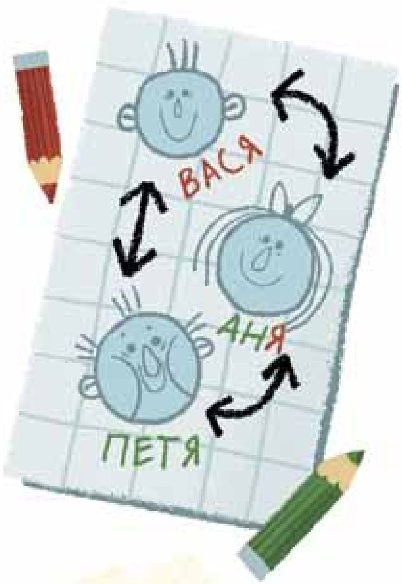
4 – А у нас в классе 25 человек, и каждый дружит ровно с семью одноклассниками!

– Не может быть этого, – ответил приятелю Витя Иванов, победитель олимпиады. Почему?

Давайте мысленно отметим на листе 25 точек – это будут ученики класса. А потом проведём отрезки, символизирующие дружбу: если два ученика дружат, то соединяем их точки отрезком. Внимание, вопрос: сколько всего мы проведём отрезков? Кажется, это легко понять. Из каждой точки выходит по 7 отрезков (ведь каждый дружит с семью одноклассниками). Всего точек 25, из каждой – по 7 отрезков, значит, всего отрезков вроде бы получается $25 \cdot 7 = 175$?

Проверим на маленьких числах. Пусть всего ребят трое, и каждый дружит с двумя. Рисунок получается

очень простой – три точки соединены попарно отрезками (как в треугольнике). А по нашей формуле выходит $3 \cdot 2 = 6$. В чём ошибка? Дело в том, что мы каждый отрезок засчитали два раза! Скажем, если в классе Петя и Вася дружат, то их отрезок-дружбу мы учли и когда считали Петины отрезки, и когда считали Васины. Поэтому для правильного ответа надо ещё на 2 поделить. В случае с тремя школьниками как раз получаем три отрезка – шесть делим на два. А в исходной задаче выходит 175/2 отрезков. Но это же нецелое число, так не бывает!



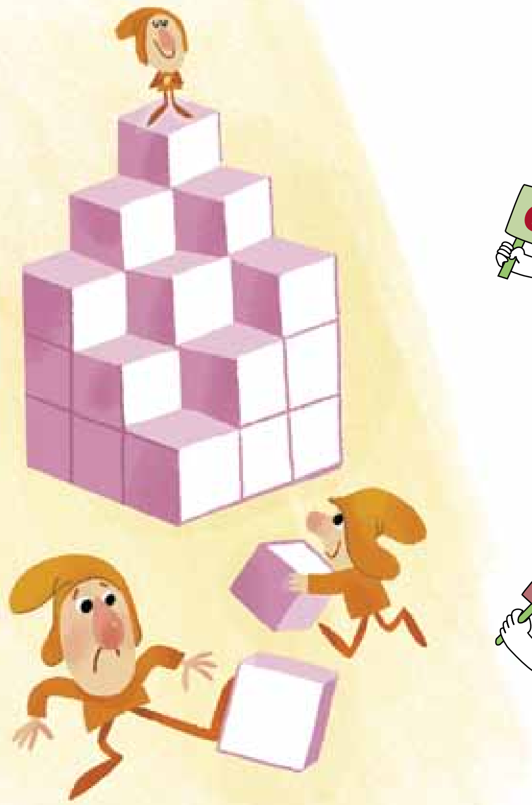
5 **а)** Можно ли заменить звёздочки в равенстве 1*2*3*4*5*6*7*8 = 0 на знаки «+» или «–» так, чтобы равенство стало верным? **б)** Тот же вопрос для равенства 1*2*3*4*5*6*7*8*9 = 0.

В равенстве из пункта а) знаки расставить можно (сделайте это!).

А вот в пункте б) попытки к успеху не приводят. Давайте разберёмся, почему. Предположим, что знаки можно расставить так, чтобы равенство выполнялось. Перенесём все числа со знаком «–» в правую часть. Получим, что сумма нескольких чисел из 1, 2, 3, …, 9 (тех, которые стоят слева от знака равенства) равна сумме остальных чисел (тех, которые стоят справа). Но тогда общая сумма чисел от 1 до 9 чётна. А это неверно: сумма чисел от 1 до 9 равна 45.

Разбиение на пары

6 Что больше: сумма всех чётных чисел первой сотни или сумма всех её нечётных чисел? На сколько?



Для решения этой задачи совсем не нужно вычислять эти суммы, а потом сравнивать. Разобьём числа от 1 до 100 на пары: 1 и 2, 3 и 4, 5 и 6, … , 99 и 100. В каждой паре одно число чётное, а другое нечётное, причем на 1 меньше. А всего пар 50. Значит, сумма нечётных чисел первой сотни на 50 меньше, чем сумма чётных чисел первой сотни.

7 Можно ли из единичных кубиков склеить тело, поверхность которого состоит из нечётного числа единичных квадратиков? (Если какие-то два кубика приклеиваются друг к другу, то по грани.)

Конечно, ответ – нельзя. Сколько отдельных кубиков ни возьми, их общая поверхность состоит из чётного числа квадратиков. При склеивании кубиков какие-то квадратики могут исчезнуть, наложившись друг на друга. Но исчезают они всегда парами – если пропал один квадратик, то пропал и тот, который к нему приклеился. Поэтому исчезнет чётное число квадратиков, а исходно их было тоже чётное количество – значит, и останется на поверхности тела чётное число квадратиков.

Задачи для самостоятельного решения

8. Кузнечик умеет прыгать вдоль прямой на 6 см и на 8 см (в любую сторону). Сможет ли он попасть в точку, расстояние от которой до исходной равно **а)** 1,5 см; **б)** 7 см; **в)** 4 см?

9. Можно ли разрезать квадрат 5×5 на доминошки 1×2?

10. Из книги выпал кусок, его первая страница имеет номер 463, а номер последней записывается теми же цифрами, но в каком-то другом порядке. Сколько страниц в куске?

11. Несколько мальчиков и девочек встали по кругу. Оказалось, что у каждого либо оба соседа девочки, либо оба соседа мальчики. Всего в кругу 5 мальчиков. А сколько девочек?

12. У Пети и Васи есть кучка из 777 спичек. Ходят по очереди, начинает Петя, за ход берут 7 или 77 спичек. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выиграет?

13. а) Нарисуйте замкнутую 6-звенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев.

б) Может ли у ломаной с таким свойством быть 7 звеньев?

14. В строчку написаны числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10. Оля и Даня по очереди ставят перед каким-нибудь из этих чисел знак «+» или «–» (если там ещё нет знака). Когда перед каждым числом будет стоять знак, вычисляется значение полученного выражения. Если оно чётное, то выигрывает Даня, а если нечётное, то Оля. Может ли Даня выиграть?

15. Одно число получили из другого перестановкой цифр. Может ли сумма этих чисел равняться **а)** 9999; **б)** 99999?

16. За круглым столом сидят 2013 представителей четырёх племён: люди, гномы, эльфы и гоблины. Известно, что люди никогда не сидят рядом с гоблинами, а эльфы – рядом с гномами. Докажите, что какие-то два представителя одного и того же племени сидят рядом.

17. Улитка ползёт из точки A с постоянной скоростью, поворачивая на 90° в какую-нибудь сторону каждые 15 минут. Докажите, что она может вернуться в точку A только через целое число часов.

Художник Ольга Демидова