№ 6 | июнь 2023

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 6
ИЮНЬ
2023

САМЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

ПЛАВУЧИЕ ОСТРОВА

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

ПРОДОЛЖАЕТСЯ ПОДПИСКА на 2-е полугодие 2023 года

*подписаться на **журнал «КВАНТИК»** вы можете в почтовых отделениях и через интернет*

ОНЛАЙН-ПОДПИСКА НА САЙТАХ

Почта России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

Агентство АРЗИ:
akc.ru/itm/kvantik

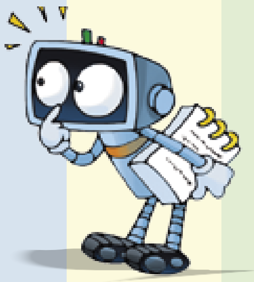
БЕЛПОЧТА:
kvan.tk/belpost

по этим ссылкам вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

ПОДПИСКА В ПОЧТОВЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ

ПОЧТА РОССИИ

индекс **ПМ068**



БЕЛПОЧТА

индексы:
14109 – для физических лиц
141092 – для юридических лиц

Подробно обо всех способах подписки, в том числе о подписке в некоторых странах СНГ и других странах, читайте на нашем сайте **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com kvantik@mccme.ru vk.com/kvantik12 t.me/kvantik12

Журнал «Квантик» № 6, июнь 2023 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Формат 84х108/16 Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 27.04.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ» за лучший детский проект о науке 2017
БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ за плодотворную работу и просветительскую деятельность 2021
ПРЕМИЯ РАН художникам журнала за лучшие работы в области популяризации науки 2022

СОДЕРЖАНИЕ

Григорий Идельсон

ПЛАВУЧИЕ ОСТРОВА

Если посмотреть на карту, видно, что очертания Южной Америки хорошо подходят к очертаниям Африки.

Такое совпадение не случайно: когда-то, 200 млн лет назад, они обе были частью огромного материка, который геологи называют Гондваной[1]. Помимо Южной Америки и Африки, в этот материк входили нынешние Аравия, Индия, Мадагаскар, Антарктида, Австралия и Новая Зеландия. Но потом этот материк раскололся, и каждая из частей отправилась в самостоятельное путешествие.

Южная Америка окончательно отделилась от Африки 60 млн лет назад. В то время она ещё соединялась с Антарктидой (эта связь прекратилась около 30 млн лет назад), а та, в свою очередь – с Австралией (они разделились 45 млн лет назад). Антарктида тогда не была царством холода. Палеонтологи говорят, что её покрывали тропические леса.

Отделившись от Африки, Южная Америка увезла с собой млекопитающих, которые там обитали в этот момент. Это были сумчатые – поэтому они есть и в Австралии, и в Южной Америке и, судя по всему, были и в Антарктиде. А из плацентарных млекопитающих она перевезла так называемых *неполнозубых*: к этой группе относятся ленивцы, муравьеды и броненосцы.

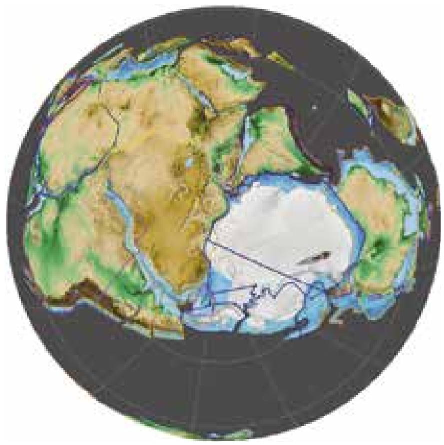


Фото: www.earthbyte.org

[1] См. также статьи М. Молчановой об Альфреде Лотаре Вегенере в «Квантиках» № 1, 2 за 2022 год.




Неполнозубые: вверху – вымерший гигантский мегатерий, муравьед (Malene Thyssen, wikimedia.org); внизу – броненосец (birdphotos.com), ленивец

Два миллиона лет назад изоляция Южной Америки закончилась: между Южной и Северной Америкой возник Панамский перешеек, и по нему с материка на материк хлынули разные животные.

Из Южной Америки в Северную пришли броненосцы и опоссумы, а в обратную сторону – и хищные, и парнокопытные, и мозоленогие (родственники верблюдов). Предки мозоленогих происходят из Северной Америки, но в наше время они там не сохранились. Представители этого отряда – верблюды – живут в Евразии и в Африке, а ламы и их родственники – в Южной Америке.

Но самую удивительную часть этой истории мы расскажем ниже. В тот момент, когда Южная Америка отделялась от Африки, ни приматов, ни грызунов ещё не существовало. Приматы появились в Африке примерно 55 млн лет назад. Грызуны появились в Азии примерно 60 млн лет назад, но до Африки добрались только около 40 млн лет назад.

Палеонтологи говорят, что и грызуны, и приматы внезапно появились в Южной Америке около 35–40 млн лет назад. Никаких следов их эволюции в Южной Америке не находили. Молекулярно-биологические данные подтверждают, что и те и другие происходят из Африки, что они расстались со своими

Слева – обезьяны Нового Света (Плосконосые, или Широконосые), с ноздрями, направленными в стороны (birdphotos.com); справа – обезьяны Старого Света (Узконосые), с ноздрями, направленными вниз (Frans de Waal, журнал PLOS Biology)

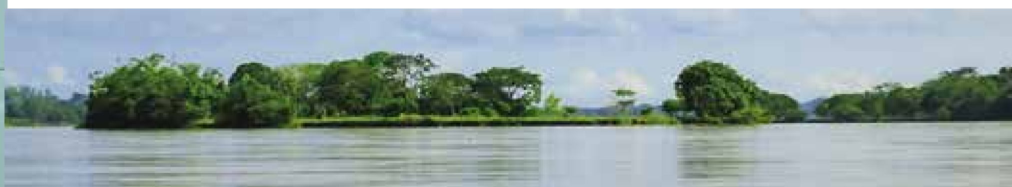
африканскими родственниками примерно 35 – 40 млн лет назад.

О том, как им удалось там оказаться, существует несколько теорий и идут горячие споры. По одной теории, всё-таки был какой-то сухопутный проход между Африкой, Антарктидой и Южной Америкой, и животные прошли по нему.

По понятным причинам, Антарктида гораздо хуже исследована палеонтологами, но, тем не менее, сумчатых там находили, а приматов и грызунов – никогда. Да и нет ведь никаких свидетельств сухопутного прохода между Африкой и Антарктидой 35 – 40 млн лет назад.

Поэтому не менее популярна другая теория: что приматы и грызуны переплыли через Атлантический океан на плавучем острове.

Как мог выглядеть такой остров? Это должен быть кусок того, что называют верховым болотом, с достаточно толстым слоем почвы, чтобы там выросли деревья. Такой остров может долго стоять на месте, а потом, во время какого-нибудь из ряда вон выходящего наводнения – оторваться и поплыть. За последнее время две разные группы – сторонники теории плавучего острова – опубликовали в серьёзных научных журналах фотографии таких островов.



Фотография плавучего острова на реке Магдалена в Колумбии, Jason Ali, Uwe Fritz, Mario Vargas-Ramirez, журнал Biogeographia

Конечно, в обоих этих случаях острова плывут по реке, а не через океан, но и путешествие через океан на плоту «с проживанием и питанием» не кажется совсем невозможным. Тем более что Атлантический океан тогда был в полтора раза у́же, чем сейчас. По расчётам, при подходящем сильном ветре такой остров мог бы пересечь океан дней за 10.

Более того, сторонники островной теории говорят, что пример обезьян Южной Америки – отнюдь не единственный. Панамский перешеек образовался 2 млн лет назад. Но обезьяны в Центральной Америке (то есть на юге Северной Америки) появились 11–12 млн лет назад. Как они туда попали?

Ещё более вопиющий пример – Мадагаскар. Хотя остров находится всего в 300 км от Африки, он отделился от неё очень давно. В составе Восточной Гондваны, вместе с Австралией, Новой Зеландией, Индией и Антарктидой он откололся от того, что стало Африкой, 160 млн лет назад. Последним он откололся от Индии и Сейшельских островов 60–90 млн лет назад.

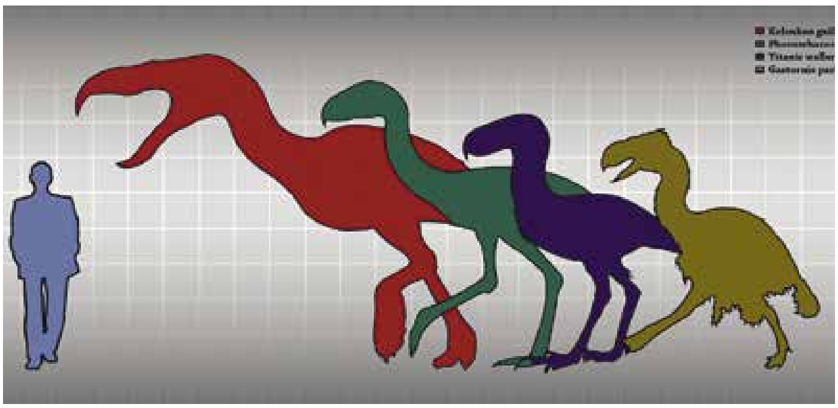
Глубина Мозамбикского пролива между Мадагаскаром и Африкой – больше 2 км, поэтому, как ни менялся бы уровень Мирового океана, там никогда не могло быть сухопутного прохода.

Почти все млекопитающие Мадагаскара встречаются только там. Но они принадлежат к отрядам, которых заведомо не было, когда Мадагаскар отделялся: приматам, грызунам, хищным, тенрекам. Это значит, что все они перебрались туда из Африки уже при отсутствии сухопутного перехода.

Уникальные звери Мадагаскара: фосса (Dawson, en.wikimedia.org) и тенрек (Markus Fink, de.wikimedia.org)

Приматы Мадагаскара: вверху – лемуры, сифака; справа – вымерший гигантский лемур размером с гориллу (Smokeybjb, wikimedia.org)

Но вот до Южной Америки хищники-млекопитающие, пока не возник Панамский перешеек, не добрались. А роль хищника в любой экосистеме очень привлекательна. Поэтому до образования Панамского перешейка эту роль играли птицы. Крупнейшими хищниками Южной Америки были нелетающие птицы, которых по-английски называют terror birds – «ужасные птицы».

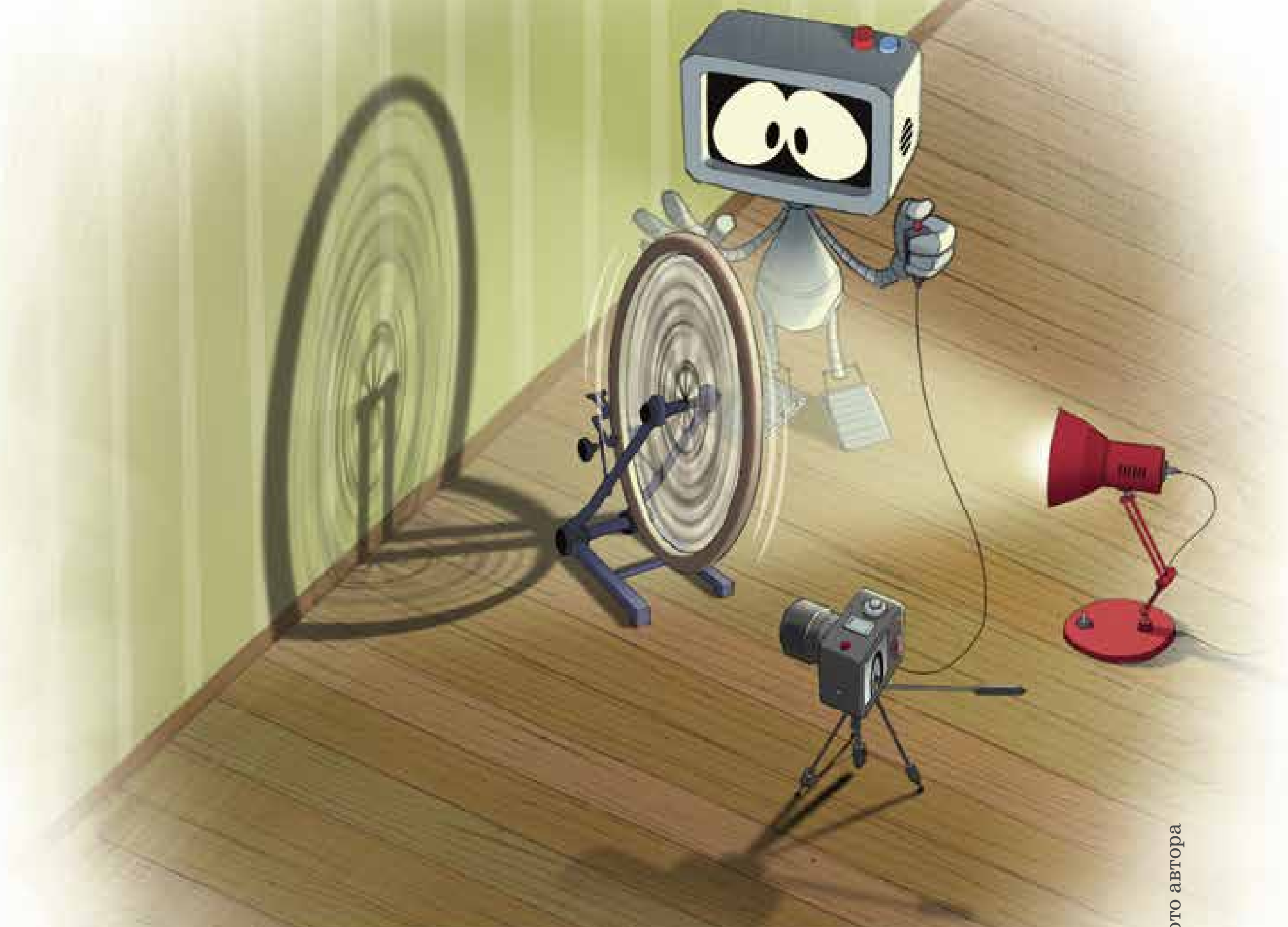


Самая крупная из них – келенкен – жила в Патагонии. Её рост был 3 м, а клюв имел длину около полуметра. Все эти птицы вымерли задолго до появления людей в Южной Америке.

Художник Мария Усеинова

УЗОР НА ВЕЛОСИПЕДНОМ КОЛЕСЕ

Внизу слева — фотография тени неподвижного велосипедного колеса, внизу справа — вращающегося. Почему справа возникают светлые дуги?



Автор Александр Бердников
Художник Алексей Вайнер
Фото автора

Ответ в следующем номере

Математический кружок

Татьяна Корчемкина,
Григорий Мерзон

САМЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Чем замечателен прямоугольный треугольник с углами 30 и 60 градусов? Вот самое известное его свойство: одна его сторона вдвое длиннее другой (а именно, гипотенуза вдвое больше катета, лежащего против угла в 30°).

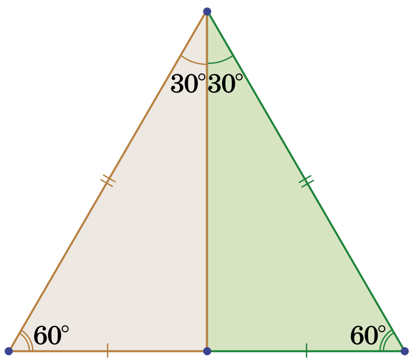


Рис. 1

Чтобы это доказать, приставим к нашему треугольнику такой же, отражённый зеркально (рис. 1): у образовавшегося большого треугольника все углы по 60°, то есть он равносторонний. Но одна его сторона – это как раз гипотенуза исходного треугольника, а другая – удвоенный катет.

Недавно Егор Бакаев заметил, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° ещё и одна биссектриса вдвое длиннее другой[1], а именно биссектриса угла в 30° вдвое длиннее биссектрисы прямого угла.

Идея: мы построим отрезок, который вдвое больше биссектрисы прямого угла («короткой»), и докажем, что он равен биссектрисе угла в 30° («длинной»). Посмотрим на рисунок 2. Наш треугольник (справа) снова дополнен до равностороннего. Пунктирный отрезок проведён параллельно «короткой биссектрисе» и вдвое её длиннее (как основание

[1] Такая задача предлагалась 12 марта 2023 года одновременно на Московской математической олимпиаде и на Турнире городов.

треугольника, в котором «короткая биссектриса» – средняя линия). А ещё пунктирный отрезок равен «длинной биссектрисе», так как каждый из этих отрезков образует угол в 15° со стороной большого равностороннего треугольника!

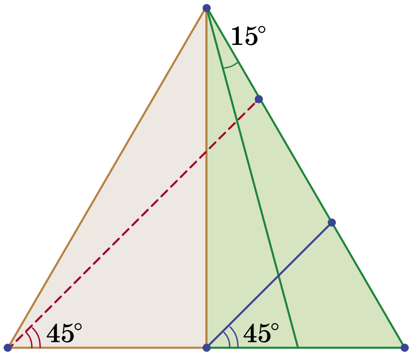


Рис. 2

Антон Авдеев заметил, что три из вершин правильного 12-угольника как раз образуют прямоугольный треугольник с углом 30° (докажите это!), биссектрисы этого треугольника лежат на диагоналях 12-угольника, и, пользуясь этим, можно доказать утверждение про биссектрисы. Попробуйте восстановить это доказательство. В качестве подсказки на рисунке 3 пунктиром проведена ещё одна диагональ.

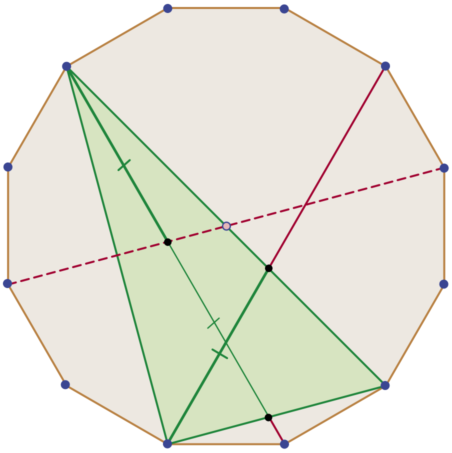


Рис. 3

Художник Мария Усеинова

Ольга Кузнецова

СУММА ЧЕРЕЗ ЧЁРТОЧКУ

Здóрово, когда новое слово складывается из старых без всяких там усечений. Ставишь чёрточку – и порядок: *музей-заповедник*, *интернет-журнал-чат*, *Анна-Мария-София-Каролина*. Теоретически нанизывать можно до бесконечности, создавая огромного словесного монстра. Но его, конечно, никто не станет использовать, так что в язык этот монстр не войдёт! В русском не особенно приняты слова с несколькими дефисами. Хотя двухчастных слов, которые пишутся через чёрточку, можно вспомнить достаточно.

Взглянем на вывески «*Овощи-фрукты*», «*Купля-продажа*» и названия игр *кошки-мышки*, *казаки-разбойники*. Некоторые путают короткую чёрточку (дефис) и длинную горизонтальную черту между словами (тире). Заменим один знак на другой и посмотрим, что получится. Фраза *Овощи – фрукты* будет утверждать, что овощи – это и есть фрукты (кстати, в древнерусском языке словом *овощ* действительно называли любой плод – и яблоко, и лимон, и даже арбуз, – а вот слово *фрукт* появилось гораздо позже). *Кошки* из-за тире станут *мышками*, *купля – продажей*, а *казаки – разбойниками*. Получается, в некоторых случаях дефис позволяет этим значениям соединяться, но не смешиваться, иначе под вывеской «*Соки-воды*» все напитки наливали бы в один стакан.

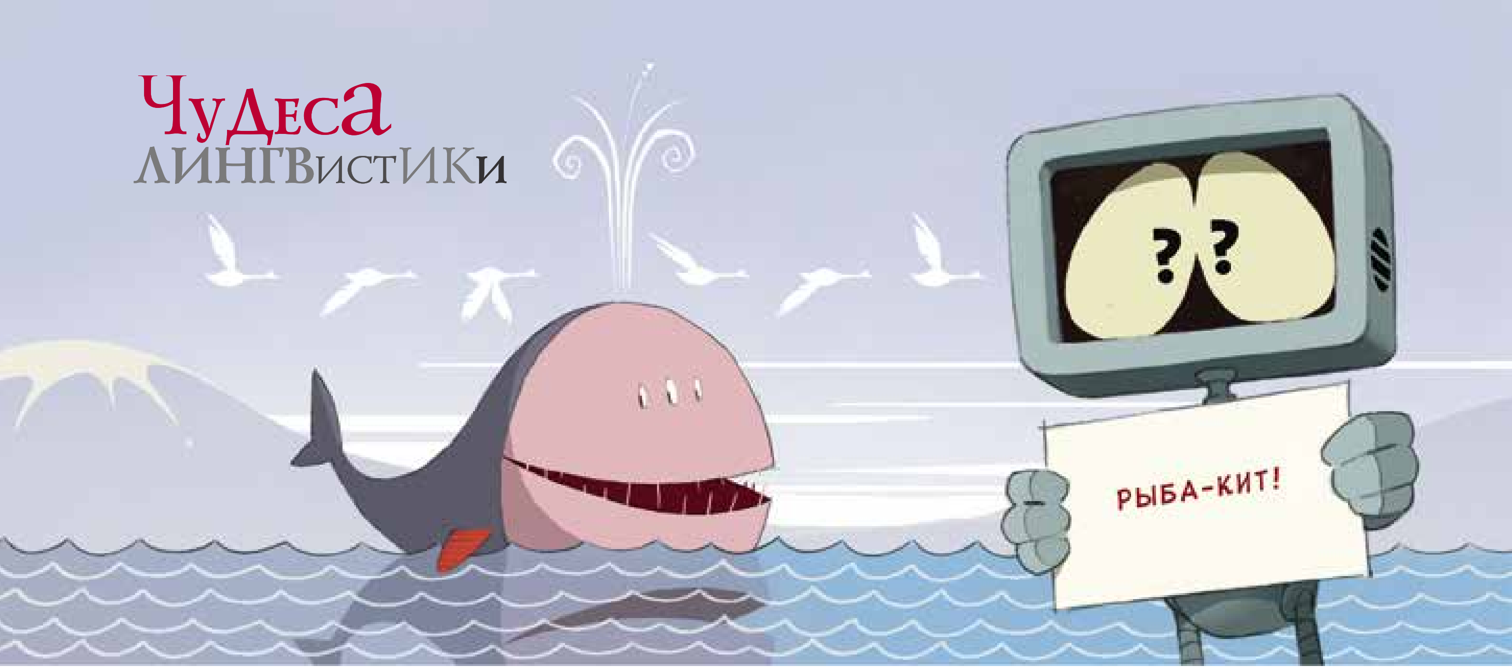
Сложносоставные слова могут называть и компанию из разных участников, и соединение двух в одном (*диван-кровать*, *юбка-шорты*). Действительно, *дом-музей* Чуковского = здание, где жил Чуковский + выставка вещей Чуковского. Но всегда ли значение нового понятия складывается из двух равных частей?

Бывает, что при написании через чёрточку одно из слов только уточ-

няет другое, поясняет его свойство: *вагон-ресторан*, *собака-поводырь*, *кресло-качалка* – тогда у них разный вес. Попробуйте объяснить эти понятия какому-нибудь малышу. Если он уже знает, что такое вагон или собака, вам останется только описать их предназначение. Слова, состоящие из неравноценных частей, иногда упрощаются. Сейчас редко говорят *инженер-программист*, *бабочка-капустница*, *школа-интернат*. Нам достаточно второго, более конкретного слова, чтобы в разговоре сразу перейти к сути. Такие соединения, как правило, считаются не одним словом, а двумя (в грамматике это называется *приложение*).

А вот *ковёр-самолёт* «сломается», если мы избавимся от любой его части. Почему? *Самолётом* сначала называли аэроплан, паром, подвижный элемент ткацкого станка и некоторые другие устройства (а *пароходом* некоторое время именовали паровоз). Название чудесного ковра не содержит слова *самолёт* в современном его значении. Некоторых детей названия сказочных предметов сбивают с толку: они представляют себе не *сапоги-скороходы*, а *сапоги скорохода*, *шапку невидимки*. На самом деле вторая часть в таких словах называет свойство, а не кого-то с этим свойством. Поэтому нам бывает сложно разбить сложное слово на части. В исторических музеях можно увидеть табличку: *кувшин-водонос* – то есть сосуд с горлышком для доставки воды. Хотя и сам доставщик будет называться *водоносом*. Как вы думаете, почему *флигель-адъютант* – офицерское звание, если флигель – это пристройка к дому?

А кто такие *гуси-лебеди*? Это сговор гусей и лебедей или всё-таки сказочные гибридные птицы? *Калинка-ма-*



линка – это про какую садовую ягоду? И к какой биологической группе относится *рыба-кит*? Есть слова, которые мы теперь строго различаем, но в древности они использовались как синонимы. И *океаном*, и *морем* называли большое водное пространство, где водились малоизвестные огромные животные – например, киты, напоминающие гигантских рыб. Так что *рыба-кит*, как и *море-океан*, – понятия, смысл которых дважды выражен в названии, хотя для нас это больше похоже на противоречие. *Гуси-лебеди* и *калинка-малинка* по устройству скорее напоминают условные обобщения, вроде более позднего выражения *банки-склянки*, но нельзя забывать, что это художественные образы, условные. Подобные названия пришли в язык из фольклорных текстов (сказок, песен, приговорок). А в художественной литературе разрешается использовать повторы ради ритма, новых эмоций, усиления смысла: *путь-дорожка*, *грусть-тоска* и др.

Ещё один хороший способ усиления – рифма. В дразнилке *рёва-корова* плач сравнивают с мычанием, поэтому слова сочетаются по смыслу и по звучанию. *Жадину-говядину*, кажется, скрепляет только смешная рифма, а в *ябеде-корябеде* вторая часть вовсе не имеет самостоятельного смысла, хотя иногда её связывают с *корябать* – «небрежно писать» (жалобы).

Новые образования с чёрточками тяжеловесны, похожи на неповоротливых толстяков, но всё-таки продолжают появляться в языке. Их часто используют для обозначения видов одежды и аксессуаров (*сумка-мешок*, *платье-пиджак*, *шапка-шлем*, *туфли-лодочки*) и многих других специальных вещей.

Художник Алексей Вайнер

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ

Евгений Смирнов

Это произошло прошлой зимой, когда Юра и Аня ездили с родителями в Объединённые Арабские Эмираты, в Дубай. Однажды вечером, нагулявшись среди небоскрёбов и даже поднявшись на самое высокое в мире здание (оно называется Бурдж-Халифа, целых восемьсот тридцать метров в высоту!), они уселись на пляже с видом на море и решили, что сейчас неплохо бы съесть по мороженому. Сказано – сделано: папа выдал Юре банкноту с видом старинной крепости, ребята сбегали к мороженщику и вернулись с двумя вафельными рожками и сдачей – горстью серебристых монеток. Любопытная Аня тут же принялась их рассматривать:

– Смотри, тут козочка какая-то нарисована! То есть, наверно, не козочка, а газель или антилопа... А тут кофейник... а что написано, непонятно – «United Arab Emirates» я могу прочитать, а остальное по-арабски... а это сколько, кстати? Смотри-ка, цифр тут тоже никаких нет, как они понимают, сколько это рублей?

– Не рублей, а дирхамов! – важно поправил сестру Юра. – А цифры... должны быть, сейчас посмотрим. Наверное, они у них как-нибудь по-другому пишутся! Вообще странно – наши цифры называются арабскими, а арабы ими не пользуются... Смотри, и правда – вот на этой монетке, с кофейником, вертикальная палочка – это явно единичка, только они её пишут немножко криво.

– То есть это один дирхам, – продолжил он. – А эти монетки, поменьше, это филсы, как наши копейки. – Юра основательно подготовился к путешествию и заранее почитал Википедию. – Вот смотри, на этой монете нефтяные вышки – потому что здесь добывают нефть. Её тут очень много, поэтому и страна эта такая богатая. На эти деньги и построены все эти небоскрёбы!

– Нет, подожди… а сколько же это тогда этих… филсов? – Аня перевернула странную семиугольную монету с тремя нефтяными вышками и уставилась на кружок и точку на обороте. Это что, ноль, что ли? Зачем делать монету в ноль, хоть бы даже и филсов?

– Какой ещё ноль? Дай сюда… нет, смотри, тут не только кружок, тут еще точка какая-то. Нет, кружок – это точно не ноль. Так, а вот тут что, на монете с козочкой? Тут тоже кружок, но справа, а слева от него что-то непонятное, палка с крючком.

– О, я знаю! Давай подумаем, какие обычно бывают монеты? Целый «рубль», то есть дирхам – вот он, с кофейником. Что ещё должно быть? В пятьдесят, условно говоря, копеек. А ещё бывают в двадцать или двадцать пять – вот в Европе есть двадцать евроцентов, а в Америке 25 центов, quarter. Ну и совсем мелочь всякая, но это не наш случай. Смотри: если кружок – это цифра пять, то…

– То нефтяные вышки – это пятьдесят филсов, а козочка – двадцать пять! – радостно закончила Аня. Ура! Тогда выходит, что ноль – это никакой не кружок, а просто точка?

– Выходит, так. А эта вот палка с крючком – это два. Итого мы уже знаем четыре из десяти цифр: ноль, один, два и пять. И понимаем, где какие монетки!

– Так, ну ладно, это мы поняли… – Аня задумчиво уставилась на новенькую блестящую монетку в один дирхам. – Вот, допустим, кофейник – тут все любят кофе пить. А под ним четыре цифры, потом чёрточка –

и ещё четыре. Что это? Выглядит как годы жизни. Ну там, как на портрете в школе: А.С. Пушкин, 1799 – 1837.

– Какие ещё годы жизни? – усмехнулся Юра. – На монетах обычно пишут год, когда монета отчеканена. Вот смотри, тут у тебя как раз написано: 2022. Эта палка с крючочком – это же двойка, мы это только что выяснили! Вот она и новенькая, ещё не захватали с прошлого года. А вот на этой монетке, смотри – 2012. Она явно постарше.

– Ну допустим… а тогда вторые четыре цифры что значат? Там, где 2022, – тысяча… а дальше непонятно. Это что, тысяча какой-то год? Но это давно было, и потом, не могли же эту монетку отчеканить и в прошлом году, и в прошлом веке?

– Хм, не знаю… О, слушай! А вдруг у арабов есть какой-нибудь другой календарь, не такой, как у нас? И прошлый год у нас был 2022-й, а у них тысяча какой-то? Так, а какой, интересно? Давай разберёмся – возьмём несколько монеток и выпишем, какие годы на них написаны. Если то, что я говорю, правда – то разность между годом по нашему календарю и по арабскому должна быть одинаковой! Сейчас…

Тут Юра полез в рюкзак, достал оттуда ручку и записную книжку и перерисовал годы чеканки по европейскому и арабскому календарям с монет, которые у него были. Некоторое время они с Аней смотрели на эту страницу, о чём-то вполголоса спорили… – а потом почти одновременно воскликнули:

– А я поняла, где здесь какие цифры!

– Ага! А я уже посчитал, какая разница между нашими календарями! Побежали папе расскажем?

Задача. Глядя на страницу в Юриной записной книжке, скажите, в каком году по европейскому и арабскому летоисчислению была отчеканена каждая из монет.

٢٠٢٢	١٤٤٣
٢٠١٢	١٤٣٣
٢٠١٤	١٤٣٥

Окончание следует

Фото: Валентина Асташкина, Григорий Мерзон

Художник Мария Усеинова

выпуск 38 2/3 ПРАВ/ды

ПЁТР I, ПАСТЕРНАК, ГОРЬКИЙ И ШАЛЯПИН

Григорий Мерзон,
Сергей Полозков

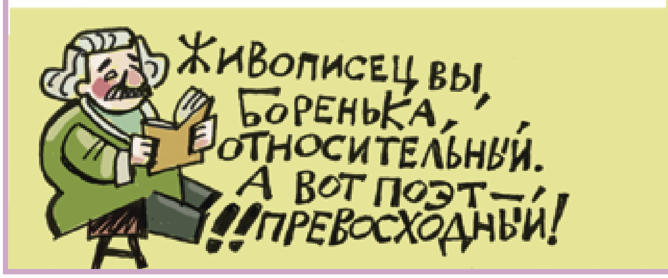
Две из этих историй известны, а одна придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности или ошибке, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ПЁТР I

В Карлсбаде, проходя мимо строившегося дома, Пётр I услышал, дескать, русский царь лишь хвалится, что умеет всё делать сам. Пётр залез на стену по лесам, взял мастерок и работал весь день, заслужив похвалу каменщиков. К 200-летнему юбилею Петра на доме повесили мемориальную доску с надписью «С каменщиками Пётр Великий был каменщиком».

ПАСТЕРНАК

Великий поэт Борис Пастернак учился в Московском училище живописи, ваяния и зодчества и в молодости хорошо рисовал. В Третьяковской галерее висит написанный им портрет Эйнштейна – его купил сам Павел Третьяков для своей галереи и демонстрировал на её открытии. Но потом Пастернак всё же бросил рисовать и посвятил себя стихам.



ГОРЬКИЙ И ШАЛЯПИН

Выдающийся певец Фёдор Шаляпин в 15-летнем возрасте не смог поступить в хор в Казани – «не прошёл по голосу». Зато в хор приняли Алексея Пешкова (будущего писателя Максима Горького). Из хора Горького вскоре всё-таки выгнали. А вот с Шаляпиным они потом дружили долгие годы. Горький даже помог Шаляпину написать автобиографию.

Художник Капыч

Константин Кохась

Как коллега Спрудль дорожил памятью

Горгулий сидел в своём кабинете директора фирмы «Математические услуги» и со скукой смотрел на кактусы, которые принёс в кабинет посетитель – коллега Спрудль.

– Вот ка-а-акой кактусёнок! – довольно промурлыкал коллега Спрудль, предъявляя ощетинившийся иголками маленький побег кактуса. – Сейчас мы его посадим. Ой! Колючий, зараза.

– Такого добра на ваших кактусах навалом, – без интереса произнёс Горгулий. – Можно за один сезон целое поле засеять.

– Не-е-ет, я всё делаю по науке. В начале каждого года я отрываю от каждого кактуса ровно одного кактусёнка. Кактусёнок целый год растёт, на сле-е-едующий год становится взрослым, но только к концу следующего года начинает ветвиться, бульк! После этого и от него можно тоже отрывать каждый год по одному кактусёнку. Я сам изобрёл это правило! За 10 лет удалось засе-е-ять кактусами целый подоконник.

– Позвольте я угадаю, – Горгулий жизнерадостно улыбнулся. – Ваши друзья ненавидят кактусы?

– Не то что бы не-е-енавидят. Просто сторонятся. Кактусы их не интересуют. Их интересуют не кактусы. А мне спокойнее. Однако моя пла-а-антация растёт, бульк. Я уже сбиваюсь со счёта. Хочу заказать у вас приложение на смартфон, которое будет пока-а-азывать, сколько у меня кактусов.

* * *

– Смотрите, какая у нашего приложения замечательная кнопка! – Горгулий чуть ли не светился. – Она словно утыкана колючками. Наш эксперт по сельскому хозяйству мышь Огрыза превзошла саму себя.

– В приложении мы для каждого кактуса завели отдельную запись, – объясняла Огрыза. – Помещайте туда всю информацию: фото, когда высажен, чем удобрялся, сколько кактусят… Куча фильтров, ссылок, кулинарных рецептов, агрономических лайфхаков, поиск единомышленников… Короче, всё, что нужно солидному кактусоводу-кактусоведу.

– А вы учли моё правило разведения кактусов?

– Разумеется! Каждая запись снабжена тегом «молодой» или «взрослый». В начале вегетативного сезона у каждой записи прошлогодний тег «молодой» или «взрослый» заменяется на «взрослый» – сюда мы будем добавлять данные за очередной год, кроме того, для каждой записи «взрослый» создаётся новая запись с тегом «молодой» для кактусёнка.

– Звучит солидно. А что с подсчётом размера всей коллекции?

– Проще простого! Сколько записей имеется – таков и размер.

* * *

– Как успехи на ниве кактусозаготовительных работ? – поинтересовался Горгулий.

– Пробле-е-емка обнаружилась с вашим приложением, бульк! – пожаловался коллега Спрудль. – Моя плантация сильно выросла, пришлось даже нанять садовника. И ваше приложе-е-ение теперь занимает столько места! При этом я совершенно не успеваю лично следить за каждым кактусом в отдельности. Их так много, что даже не удаётся поддерживать за-а-аписи про подкормку, поливку, стрижку…

– Мы предвидели ваши трудности, – уверенно сказал Горгулий. – За небольшую плату вы можете установить обновление, где радикально сокращён объём используемой памяти. Представляю вам эксперта по оптимальным процессам: таракан Кузька! Он разработал чрезвычайно эффективный подход!

Кузька скромно пошевелил усами.

– Идея лежит на поверхности, – стал объяснять он. – Не будем хранить информацию об индивидуальных кактусах! Запишем лишь, сколько кактусят появляется каждый год. Все кактусы на вашей плантации когда-то были кактусятами, правильно?

– Не совсем, всё-таки самый пе-е-ервый кактус достался мне уже взрослым.

– Хорошо, – согласился Кузька. – Давайте посчитаем. В первый год у вас от этого взрослого кактуса появился первый кактусёнок, значит, $f_1 = 1$. На следующий год завелся ещё один кактусёнок, значит, $f_2 = 1$. Предыдущий кактусёнок к этому времени дорос до состояния «взрослый», и годом позже появилось два

кактусёнка, $f_3 = 2$, а подросший стал третьим взрослым. И так далее. Сейчас у вас идёт который год?

– n-й, – не моргнув глазом сказал коллега Спрудль.

– Значит, в прошлом году у вас появилось f_{n-1} кактусят, и общее число кактусов к началу n-го года равно $1+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}$.

– Пе-е-ервое слагаемое единица – это мой самый пе-е-рвый кактус? – уточнил коллега Спрудль.

– Да. А последнее слагаемое – это подросшие кактусята, которые в n-м году ещё только начнут ветвиться и своих кактусят пока не имеют. Но вот в следующем году каждый кактус, учтённый в этой сумме, даст вам кактусёнка, понимаете, к чему я клоню?

– Вы хотите сказать, что эта сумма равна f_{n+1}?

– Именно так! Мы вывели потрясающую формулу

$$f_{n+1}=1+f_1+f_2+\ldots+f_{n-1}.$$

Столь длинная и сложная речь явно переутомила Кузьку. Он еле держался на ногах.

– Таким образом, – пришёл ему на помощь Горгулий, – число f_{n+1} – это не только количество кактусят, которые появятся в $(n+1)$-м году, но и по совместительству количество всех кактусов, имевшихся в самом начале n-го года. Это именно то число, которое вас интересует! Для его подсчёта требуется лишь хранить предыдущие числа – это всего-то $n-1$ ячейка памяти. Потрясающая экономия! И заметьте: кнопочку запуска приложения мы тоже поменяли. Видите – колючки топорщатся, но уже не так густо.

* * *

– На-а-аш век – это век рациональности, разумности и эффективности! Всюду оптимизация, системность и безотходность, бульк! А ваше приложение с ка-а-актусами – это монстр! – возмущался коллега Спрудль. – Каждый год оно отъедает у моего смартфона ещё одну ячейку памяти! Конечно, это совершенно не крити-и-чно, на ближайший миллион лет памяти точно хватит, но меня угнетает такая примитивность! Чтобы найти число кактусов, мы складываем всё, что хранится в памяти, бульк! Так могли рассуждать неандертальцы! Это расточительно! Мне-е-е и так уже пришлось расширить штат садовников. Где новейшие технологии и современные алгоритмы?

– Будут вам технологии. Возьмите бланк заказа. Давайте зафиксируем требуемый объём памяти. У меня для вас шикарное предложение. Предлагаю использовать всего две ячейки! Годится?

– Всего две? Как же вам это удастся?

– Вы имеете дело с профессионалами экстра-класса. Вот здесь напишите прописью «д-в-е». Хорошо. А как удастся… да проще простого! Сами посмотрите:

$$f_{n+1} = (1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2}) + f_{n-1},$$
$$f_n = 1 + f_1 + f_2 + \ldots + f_{n-2}.$$

Чем, по-вашему, отличаются правые части строчек?

– В первой строке на одно слагаемое больше. Постойте… Вы хотите сказать, что выполняется правило

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}?$$

И эти ваши две ячейки соответствуют двум слагаемым в правой части формулы? Нет уж! Бульк! Не на того напали! Подайте мне способ вычислить f_n с одной ячейкой памяти! – Коллега Спрудль выхватил лежавший перед Горгулием бланк заказа и, перечеркнув слово «две», написал «одну».

– Что это за манеры – раз в минуту менять своё мнение! Ну, если вы заказываете всего одну ячейку – сделаем и с одной, но тогда извольте внести полную предоплату! За результатом зайдёте завтра!

* * *

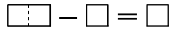
Горгулий отодвинул в сторону папки и ноутбук, и Бусенька выложила на стол несколько шоколадок. Коллега Спрудль удивлённо принюхался.

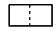
– Итак, вы подсчитываете кактусы, – начал Горгулий, в то время как Бусенька вынимала шоколадки из обёрток, – и вас интересует, какое число кактусов будет расти на вашей плантации в начале n-го года, – эксперт Кузька предложил обозначать его f_{n+1}. Началось всё с одного кактуса. Можно считать, что он относится в наших подсчётах к «нулевому» году, то есть $f_1 = 1$, а дальше события развивались так:

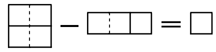
$$f_2 = 1, \quad f_3 = 2, \quad f_4 = 3, \quad f_5 = 5, \quad f_6 = 8, \quad \ldots$$

Коллега Спрудль проверил историю вопроса и кивнул. Бусенька аккуратно стала ломать шоколадки.

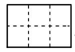
– Будем считать клеточки в фигурах, – объявила она и, выложив три кусочка на стол, соорудила из них равенство

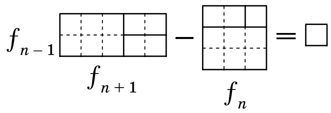


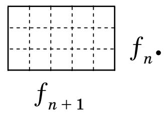
– Добавим к обеим частям по кусочку 1×2: .

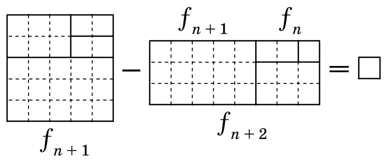


Коллега Спрудль тоже взял себе какой-то кусочек.

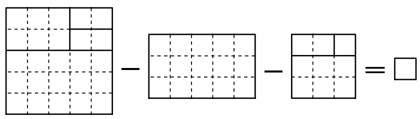
– Теперь добавим кусочки 2×3: .



Дальше добавляем кусочки $f_n \times f_{n+1}$: 



Вычитаемое разобьём на две исходные части и запишем получившееся равенство:



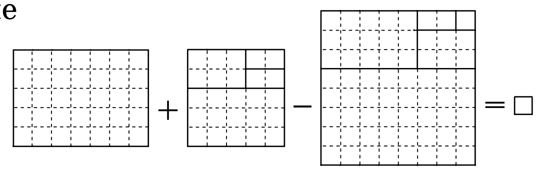
$$f^2_{n+1} - f_{n+1}f_n - f^2_n = 1.$$

Коллега Спрудль отправил кусок шоколадки себе в пасть и стал с подозрением рассматривать формулу.

– Неандертальцы с ужасом разбегаются по пещерам, – ехидно прокомментировал Горгулий. – Мы получили квадратное уравнение относительно f_{n+1}! У него два корня – положительный и отрицательный. Решая уравнение, находим, что положительный корень равен

$$f_{n+1} = \frac{f_n + \sqrt{5f_n^2 + 4}}{2}.$$

– Так происходит при чётном n, – уточнила Бусенька, – а при нечётном слагаемые в уравнении поменяются местами: большой квадратик будет вычитаться, а две другие части – прибавляться. Получится уравнение



$$f_{n+1}f_n+f_n^2-f_{n+1}^2=1.$$

И при нечётных n формула для корня уравнения будет выглядеть немного по-другому:

$$f_{n+1}=\frac{f_n+\sqrt{5f_n^2-4}}{2}.$$

Комбинируя эти два случая вместе, получаем итоговую формулу:

$$f_{n+1}=\frac{f_n+\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n}}{2}.$$

– Неужели этот квадра-а-атный корень всегда целое число? – недоверчиво спросил коллега Спрудль.

– У него нет другого выбора, – уверенно ответил Горгулий.

– Если хотите,– сказала Бусенька, – корень можно убрать. Как я понимаю, при больших n числа f_n не просто большие – они огромные.

– В этом году – особенно! – грустно подтвердил коллега Спрудль.

– Поэтому $\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n}$ с хорошей точностью равно $\sqrt{5}\,f_n$. Точнее говоря, при $n>2$ их разность по модулю всегда меньше 1. А значит, заменив этот сложный корень на $\sqrt{5}\,f_n$, мы изменим правую часть меньше чем на $\frac{1}{2}$ и, следовательно, сможем вычислять f_{n+1} по совсем простой формуле:

$$f_{n+1}=\left[\!\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2}\cdot f_n\right]\!\right].$$

Здесь квадратные скобки – обычное округление.

– А мне формула с корнем больше нравится, – сказал Горгулий, – с корнем как-то загадочнее!

Когда коллега Спрудль ушёл, Горгулий спросил:

– Как ты думаешь, он ещё вернётся?

– Конечно, – ответила Бусенька. – Ему надоели кактусы. Он злится и ищет, на ком бы выместить злость. Завтра же явится со словами «подайте мне способ считать кактусы, не храня в памяти никаких данных».

– И что мы будем делать?

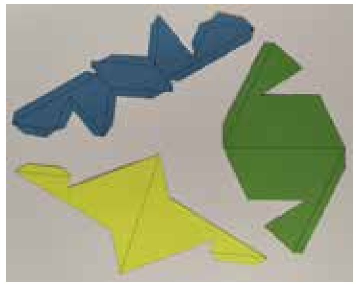
– Мы продадим ему явную формулу!

$$f_n=\frac{1}{\sqrt{5}}\left(\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right).$$

Художник Инга Коржнева

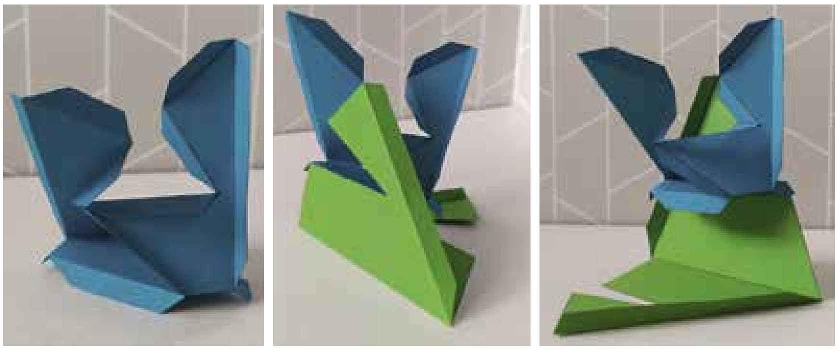
Татьяна Корчемкина

СОБИРАЕМ МНОГОГРАННИК СИЛАШИ



В «Квантике» №5 за 2023 год было рассказано о семиграннике Силаши: в нём любые две грани имеют общее ребро! Чтобы лучше понять, как устроен этот необычный многогранник, попробуйте склеить его самостоятельно. По ссылке kvan.tk/szilassi можно найти развёртку для распечатки на листе А4, а ниже на фото представлен процесс сборки.

Начать проще всего с трёх «внутренних» граней (на фото – синие), а затем последовательно приклеить к ним самые широкие грани (на фото – зелёные).



Теперь осталось лишь приклеить оставшиеся жёлтые грани – и многогранник Силаши готов!

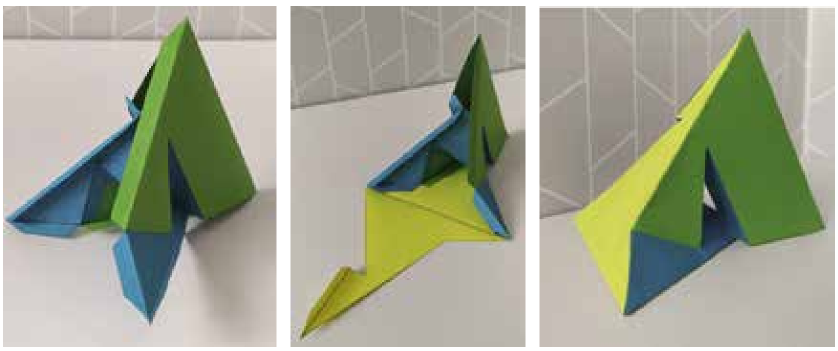
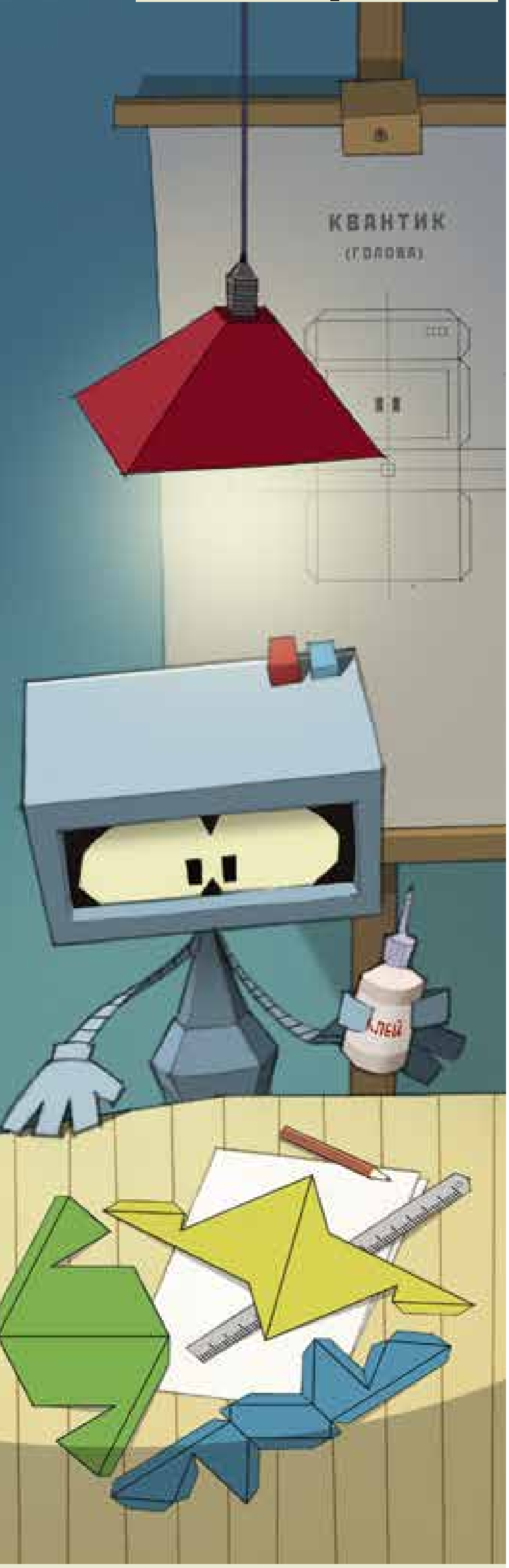


Фото автора
Художник Алексей Вайнер



XLIV ТУРНИР ГОРОДОВ
ВЕСЕННИЙ ТУР, 8-9 КЛАССЫ

26 февраля 2023 года прошёл базовый вариант, а 12 марта 2023 года – сложный вариант весеннего тура XLIV Турнира городов. В скобках указано число баллов за полное решение задачи. При подведении итогов учитываются три задачи, по которым участник набрал больше всего баллов (баллы за пункты одной задачи суммируются).

Базовый вариант

1. В кабинете сидят N неряx, у каждого на его столе скопилось ненулевое количество мусора. Неряхи выходят обедать по одному (после возвращения предыдущего), а в это время каждый из остальных перекладывает половину мусора со своего стола на стол вышедшего. Может ли случиться, что после того, как все пообедали, количество мусора на столе у каждого будет таким же, как и до обеда, если

а) [1] $N=2$;

б) [3] $N=10$?

Алексей Заславский

2 [4]. В треугольнике ABC провели медианы BK и CN, пересекающиеся в точке M. Какое наибольшее количество сторон четырёхугольника $ANMK$ может иметь длину 1?

Егор Бакаев

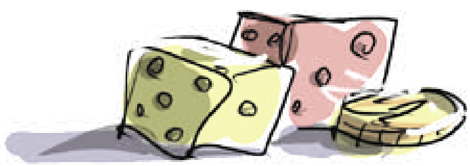
3 [5]. На столе лежат 2023 игральных кубика. За 1 рубль можно выбрать любой кубик и переставить его на любую из четырёх граней, которые сейчас для него боковые. За какое наименьшее количество рублей гарантированно удастся поставить все кубики так, чтобы на верхних гранях у них было поровну точек? (Количества точек на гранях каждого игрального кубика равны числам 1, 2, 3, 4, 5, 6, суммарное число точек на противоположных гранях всегда равно 7.)

Егор Бакаев

4 [5]. Для произвольного числа x рассмотрим сумму

$$Q(x)=\lfloor x\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{2}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{3}\right\rfloor+\left\lfloor\frac{x}{4}\right\rfloor+\ldots+\left\lfloor\frac{x}{10000}\right\rfloor.$$

Найдите разность $Q(2023)-Q(2022)$.



(Здесь $\lfloor x \rfloor$ обозначает целую часть числа x, то есть наибольшее целое число, не превосходящее x.)

Алексей Толпыго

5. На каждой клетке доски 5×5 лежит по одной монете, все монеты внешне одинаковы. Среди них ровно 2 монеты фальшивые, они одинакового веса и легче настоящих, которые тоже весят одинаково. Фальшивые монеты лежат в клетках, имеющих ровно одну общую вершину. Можно ли за одно взвешивание на чашечных весах без гирь гарантированно найти

а) (2) 13 настоящих монет;
б) (3) 15 настоящих монет;
в) (2) 17 настоящих монет?

Рустэм Женодаров,
Александр Грибалко,
Сергей Токарев

Сложный вариант

1 [4]. Докажите, что в прямоугольном треугольнике с углом 30° одна из биссектрис в два раза короче какой-то другой биссектрисы.

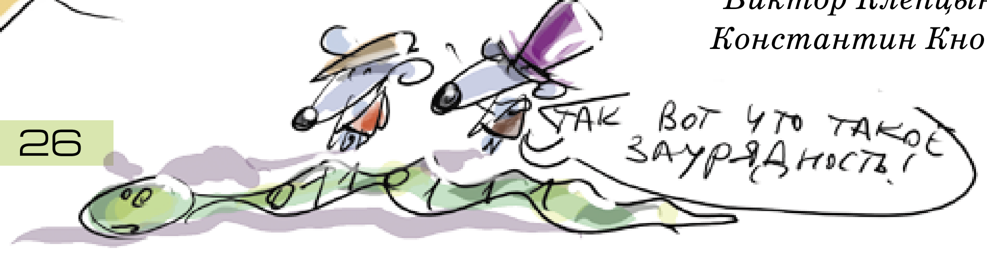
Егор Бакаев

2 [5]. На клетчатой доске 10×10 в одной из клеток сидит бактерия. За один ход бактерия сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две бактерии (обе остаются в той же клетке). Затем снова одна из сидящих на доске бактерий сдвигается в соседнюю по стороне клетку и делится на две и так далее. Может ли после нескольких таких ходов во всех клетках оказаться поровну бактерий?

Александр Грибалко

3 [7]. Назовём натуральное число *заурядным*, если в его десятичной записи встречаются только нули и единицы. Пусть произведение двух заурядных чисел оказалось заурядным числом. Обязательно ли тогда сумма цифр произведения равна произведению сумм цифр сомножителей?

Виктор Клепцын,
Константин Кноп



4 [8]. На сторонах равностороннего треугольника ABC построены во внешнюю сторону треугольники $AB'C$, $CA'B$, $BC'A$ так, что получился шестиугольник $AB'CA'BC'$, в котором каждый из углов $A'BC'$, $C'AB'$, $B'CA'$ больше $120°$, а для сторон выполнены равенства $AB' = AC'$, $BC' = BA'$, $CA' = CB'$. Докажите, что из отрезков AB', BC', CA' можно составить треугольник.

Давид Бродский

5 [8]. Натуральные числа от 1 до 100 раскрашены в три цвета: 50 чисел – в красный, 25 чисел – в жёлтый и 25 чисел – в зелёный. Известно, что все красные и жёлтые числа можно разбить на 25 троек так, чтобы в каждой тройке было два красных числа и одно жёлтое, которое больше одного красного и меньше другого. Аналогичное утверждение верно для красных и зелёных чисел. Обязательно ли все 100 чисел можно разбить на 25 четвёрок, в каждой из которых два красных числа, одно жёлтое и одно зелёное, при этом жёлтое и зелёное числа лежат между красными?

Александр Грибалко

6. Пусть X – некоторое множество целых чисел, которое можно разбить на N непересекающихся возрастающих арифметических прогрессий (бесконечных в обе стороны), а меньше чем на N – нельзя. Для любого ли такого X такое разбиение на N прогрессий единственно, если

а) [4] $N = 2$;

б) [4] $N = 3$?

(Возрастающая арифметическая прогрессия – это последовательность, в которой каждое число больше своего соседа слева на одну и ту же положительную величину.)

Виктор Клепцын

7 [10]. Правильный 100-угольник разрезали на несколько параллелограммов и два треугольника. Докажите, что эти треугольники равны.

Александр Юран

Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, VIII ТУР

(«Квантик» № 4, 2023)

36. *У профессора есть несколько будильников. Вечером он заводит все будильники с интервалами в* 5 *минут, на* 7:00*,* 7:05*,* 7:10*, и так далее. Когда будильник звонит, профессор мгновенно нажимает кнопку «отложить», а будильник переносит звонок на* 9 *минут вперёд. Профессор окончательно просыпается, когда одновременно звонят сразу* 4 *будильника. Успеет ли он проснуться ранее* 9:30 *утра, чтобы успеть на свою зум-лекцию?*

Ответ: да. Посмотрим на будильники, впервые сработавшие в 7:00, 7:45 и 8:30. К 9:15 от первого звонка этих трёх будильников пройдёт 135, 90 и 45 минут соответственно. Все эти числа кратны 9, поэтому в 9:15 прозвенят эти три будильника и четвёртый, заведённый на 9:15.

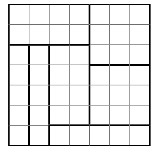
37. *Из деревянного бруса в форме параллелепипеда* $1\,дм \times 1\,дм \times 50\,дм$ *несколькими поперечными распилами получили бруски, из которых склеили каркас куба. Какова высота этого каркаса, если его рёбра в поперечном сечении имеют размер* $1\,дм \times 1\,дм$*?*

Ответ: 5,5 дм. Пусть высота каркаса h дм. Чтобы найти h, распилим каркас на части и сложим исходный брус. Выпилим 4 вертикальных бруска $1\times1\times h$, останется 8 брусков $1\times1\times(h-2)$. Сложив бруски в ряд вплотную друг к другу, получим параллелепипед шириной и высотой 1 дм и длиной $4h+8(h-2)=12h-16$. По условию $12h-16=50$, откуда $12h=66$ и $h=5{,}5$ дм.

38. *Фокусник хочет заготовить* 10 *карточек, написать на каждой натуральное число, не большее* 90*, чтобы все числа были различны, и показывать такой фокус: зритель наугад выбирает две карточки, называет фокуснику сумму чисел на них, а фокусник тут же отгадывает, какие две карточки у зрителя. Помогите фокуснику найти числа и объясните, почему фокус будет получаться.*

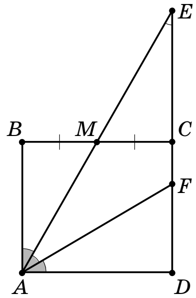
Ответ: можно взять числа 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 33, 54, 87. Это первые 10 чисел последовательности Фибоначчи: очередное число получается как сумма двух предыдущих. Фокусник сможет отгадать числа с карточек зрителя, если любые две разные пары чисел дают разные суммы. Но для чисел Фибоначчи это так: среди четырёх чисел двух пар есть наибольшее, оно уже не меньше суммы двух чисел другой пары, а вместе со вторым числом в своей паре – больше.

39. *Квадрат* 7×7 *разрезали по границам клеток на* 7 *прямоугольников одинакового периметра. Обязательно ли все эти прямоугольники одинаковые?*



Ответ: нет. См. рисунок: квадрат разрезан на прямоугольники 1×5, 2×4 и 3×3 периметра 12.

40. *Один из углов прямоугольника поделён двумя лучами на три равных угла. Один из этих лучей делит сторону прямоугольника пополам. Второй луч пересекает другую сторону. В каком отношении он её делит?*



Ответ: 1:2. Обозначим точки как на рисунке. Продлим луч AM и сторону DC до пересечения в точке E. Тогда треугольники ABM и ECM равны ($BM=MC$, $\angle BMA=\angle EMC$ и $\angle ABM=\angle ECM=90°$), поэтому $EC=AB=CD$, а также $\angle CEM = \angle MAB=\angle MAF$. Значит, треугольник AEF – равнобедренный, $AF=EF$. С другой стороны, в прямоугольном треугольнике AFD катет FD лежит против угла в $90°:3=30°$, значит, гипотенуза AF в два раза больше катета FD. Тогда $2\,FD=AF=EF= =EC+CF=CD+CF=FD+2\,CF$, откуда $FD=2\,CF$.

ЗАЧЕМ САМОВАРУ ТРУБА?

(«Квантик» № 5, 2023)

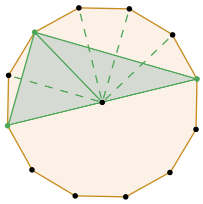
Краткий ответ: труба создаёт тягу, то есть увеличивает приток свежего воздуха, а от постоянного поступления кислорода усиливается горение (мы пользуемся этим, раздувая огонь). Разберёмся, почему же труба создаёт тягу.

Воздух поступает к дровам снизу, через решётку, проходит по внутренней трубе, где горят дрова, и выходит сверху – сразу наружу или сначала во внешнюю трубу. Ведь при нагревании воздух расширяется, становится легче холодного и поднимается вверх. Это происходит и без трубы: даже от обычного костра мы видим более или менее поднимающийся смешанный с горячим воздухом дым. Но без трубы горячий воздух сразу перемешивается с окружающим холодным воздухом. А если поставить трубу, в ней перемешивания не происходит и образуется столб горячего воздуха.

Присмотримся теперь к этому столбу воздуха. Пока огня нет, воздух внутри трубы имеет ровно такую массу, чтобы уравновесить разницу давлений внизу трубы и вверху трубы. Но если весь этот воздух нагреть, масса воздуха в трубе будет меньше – например, если нагреть до 300 градусов, то вдвое меньше! А вот давление снаружи самовара практически не изменится, так что разница давлений сверху и снизу трубы будет создавать тягу. Чем выше труба, тем больше разница давлений и тем сильнее тяга.

САМЫЙ ЗАМЕЧАТЕЛЬНЫЙ ПРЯМОУГОЛЬНЫЙ ТРЕУГОЛЬНИК

Соединив центр 12-угольника со всеми его вершинами, мы получим 12 углов по $360^\circ : 12 = 30^\circ$. Два таких соседних угла образуют угол 60°, а четыре – 120°. Соединив центр 12-угольника с вершинами, как на рисунке, мы получим два равнобедренных треугольника с общей боковой стороной и углами 60° и 120° при вершине. Но у таких треугольников углы при основании равны 60° и 30°, значит, три отмеченные вершины 12-угольника действительно образуют треугольник с углами 30°, 60° и 90°.



СУММА ЧЕРЕЗ ЧЁРТОЧКУ

Flügel по-немецки – крыло. И по-русски можно сказать: *крыло здания*. А флигель-адъютант должен передавать команды начальника на фланги – «крылья» армии. Перед нами снова разные значения одного слова, хотя и заимствованного.

АРАБСКИЕ ЦИФРЫ.

Ответ: 2022 – 1443, 2012 – 1433, 2014 – 1435.

Если предположить, что разница между двумя календарями постоянна, то из первых двух паро ٤ на 1 больше, чем ٣. А из второй и третьей ٥ − ٣ = ٤ − ٢, то есть ٣ + ٤ = 7. Поэтому ٤ = 4, ٣ = 3. Для справки приведём и остальные цифры:

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
٠	١	٢	٣	٤	٥	٦	٧	٨	٩

На самом деле, соотношение между двумя календарями сложнее, см. следующий номер.

КАК КОЛЛЕГА СПРУДЛЬ ДОРОЖИЛ ПАМЯТЬЮ

Последовательность f_n, обнаруженная коллегой Спрудлем, – это знаменитые *числа Фибоначчи*, которые вместе с рекуррентной формулой

$$f_{n+1} = f_n + f_{n-1}$$

были известны ещё в древней Индии, а история о кроликах вошла в математический обиход в XIII веке. Формула, доказанная Кузькой, чуть менее известна. А формула, которую Бусенька вывела с помощью шоколадок,

$$f_{n+1}^2 - f_{n+2} f_n = (-1)^n,$$

называется *тождеством Кассини*. Бусенька преобразовала тождество Кассини к виду

$$f_{n+1}^2 - f_{n+1} f_n - f_n^2 = (-1)^n.$$

И если заменить здесь f_{n+1} на x, получится квадратное уравнение:

$$x^2 - f_n x - f_n^2 - (-1)^n = 0.$$

При $x = 0$ левая часть отрицательна – значит, уравнение имеет два корня разного знака. Факт, на который обратил внимание коллега Спрудль, – что выражение $5a^2 \pm 4$ под знаком квадратного корня будет квадратом целого числа, если взять в качестве a число Фибоначчи f_n (а на самом деле – только для чисел Фибоначчи оно и будет квадратом), – совершенно удивительный, доказать его непосредственно трудно.

Бусенька не стала объяснять коллеге Спрудлю, почему квадратный корень с хорошей точностью равен $\sqrt{5} f_n$. Для оценки можно было воспользоваться приёмом «домножим на сопряженное» или формулой $a - b = \dfrac{a^2 - b^2}{a+b}$:

$$\sqrt{5f_n^2 + 4\cdot(-1)^n} - \sqrt{5}f_n = \frac{\left(\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n}\right)^2 - \left(\sqrt{5}f_n\right)^2}{\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n} + \sqrt{5}f_n} =$$

$$= \frac{4\cdot(-1)^n}{\sqrt{5f_n^2+4\cdot(-1)^n} + \sqrt{5}f_n}.$$

Начиная с $n = 3$ число $f_n \geqslant 2$, и по модулю знаменатель больше числителя.

Сложная формула, которой заканчивается сказка, называется *формулой Бине́*. На первый взгляд кажется невероятным, что правая часть формулы – целое число. Бусенькина формула $f_{n+1} = \left[\!\left[\frac{1+\sqrt{5}}{2} \cdot f_n\right]\!\right]$ означает, что f_{n+1} приблизительно в $\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ раз больше, чем f_n, поэтому весьма правдоподобно, что f_n не сильно отличается от $\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$ – первого слагаемого формулы Бине. Но до формулы Бине отсюда ещё далеко.

XLIV ТУРНИР ГОРОДОВ, ВЕСЕННИЙ ТУР, 8 – 9 КЛАССЫ

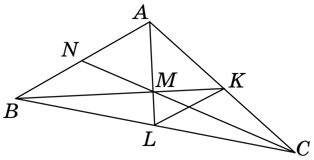
Базовый вариант

1. Ответ: может.

а) Подходит пример, когда у первого ушедшего на обед 2 г мусора, а у второго – 4 г.

б) Занумеруем нерях в порядке их ухода на обед. Пусть на столе i-го неряхи лежит 2^i г мусора. После ухода первого на его столе окажется $2 + 2 + 4 + 8 + \ldots + 2^9 = 2^{10}$ г мусора, а на каждом из остальных столов вес мусора уменьшится вдвое, то есть произойдёт циклический сдвиг. После ухода второго произойдёт аналогичный сдвиг, а после 10 таких сдвигов на всех столах окажется исходное количество мусора.

2. Ответ: 2 стороны. Подходит, например, любой треугольник, где $AB=AC=2$.



Напомним, что медианы треугольника делятся точкой их пересечения в отношении 2:1, считая от вершины. Пусть хотя бы три стороны четырёхугольника $ANMK$ равны 1. Возможны всего два принципиально различных случая.

1) $AN=NM=MK=1$. Тогда $NB=1$, $MB=2$, значит, $MN+NB=MB$.

2) $KA=AN=NM=1$. Тогда $AC=2$, $NC=3$, значит, $NA+AC=NC$.

В обоих случаях получаем противоречие с неравенством треугольника.

3. Ответ: за 2022 рубля. Пусть есть пара *противоположных* кубиков, то есть сумма точек на их верхних гранях равна 7. Заметим, что на эту пару потребуется суммарно 2 рубля, к какому бы значению ни захотелось их привести. Будем откладывать пары противоположных кубиков, пока они есть. Так как исходное количество кубиков нечётно, то в конце останется хотя бы один кубик, пусть на его верхней грани n точек. Тогда остальные непарные кубики, каждый не более чем за 1 рубль, можно привести в то же состояние. Значит, 2022 рублей хватит.

Однако мог остаться только один кубик без пары, поэтому 2022 рубля необходимо.

4. Ответ: 6. Очевидно, $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor \leqslant \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Неравенство $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor = m$ означает, что $x-1<km\leqslant x$, откуда $x=km$, то есть x делится на k, и тогда $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor - 1$. Верно и обратное: если x кратно k, то $\left\lfloor \frac{x-1}{k} \right\rfloor < \left\lfloor \frac{x}{k} \right\rfloor$. Значит, среди чисел $\lfloor 2023 \rfloor - \lfloor 2022 \rfloor$, $\left\lfloor \frac{2023}{2} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{2} \right\rfloor$, ... , $\left\lfloor \frac{2023}{10\,000} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{2022}{10\,000} \right\rfloor$ единиц ровно столько, сколько у числа 2023 натуральных делителей, а остальные числа равны нулю. *Разность* $Q(2023)-Q(2022)$ равна сумме вышеуказанных чисел, то есть количеству натуральных делителей числа $2023=7\cdot 17^2$, их 6.

5. Ответ: а), б) можно; **в)** нельзя.

Раскрасим доску и монеты на ней в шахматном порядке (угловые клетки чёрные, монеты красим в цвет клетки). Тогда обе фальшивые монеты одного цвета.

а) Положим на чаши 4 чёрные монеты, соседние с центральной: две левые – на левую, две правые – на правую. При равновесии все чёрные монеты настоящие (две фальшивые чёрные не могут быть ни на разных чашах, ни обе вне чаш). Если какая-то чаша перевесит, то настоящие – две монеты на этой чаше и все белые.

б) Сравним 5 чёрных монет с 5 белыми на левом рисунке ниже. При равновесии 15 монет в нижних трёх строках настоящие. Если чёрные монеты тяжелее, не взвешиваемая фальшивая монета может находиться только в квадратах, отмеченных крестиками на рисунке в центре. Значит, мы нашли $25-5-5=15$ настоящих монет. Если белые монеты тяжелее, получаем рисунок справа, и снова у нас не более $5+5$ клеток, где могут лежать фальшивые монеты.

●	○	●	○	●
○	●	○	●	○

×		×		×
●	○	●	○	●
○	●	○	●	○
	×		×	

	×		×	
●	○	●	○	●
○	●	○	●	○
×		×		×

в) Априори любая из 25 монет *подозрительна* (может быть фальшивой). Взвешивание может иметь 3 исхода, поэтому по крайней мере при одном из них подозрительными останутся не меньше 9 монет, то есть будет найдено не более $25-9=16$ настоящих монет.

Замечание. Можно доказать, что даже 16 настоящих монет нельзя найти гарантированно.

Сложный вариант

1. См. решение на с. 8–9.

2. Ответ: не может. Раскрасим клетки доски в белый и чёрный цвета в шахматном порядке. Рассмотрим разность между количеством бактерий на белых клетках и количеством бактерий на чёрных клетках. При ходе с чёрной клетки на белую она увеличивается на 3, а при ходе с белой на чёрную уменьшается на 3. Поскольку вначале эта разность равнялась 1 или –1, она никогда не станет кратна 3, в частности не станет равна 0.

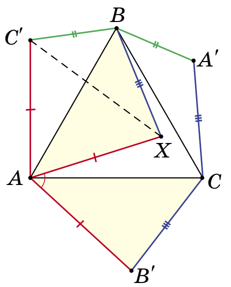
3. Ответ: не обязательно. Рассмотрим произведение двух заурядных чисел

$$(10^2+10^4+10^8+\ldots+10^{1024})\times$$
$$\times(10^{N-2}+10^{N-4}+10^{N-8}+\ldots+10^{N-1024}),$$

где N – большое чётное число (например, миллион). Раскрыв скобки, мы получим много слагаемых, каждое из которых – степень числа 10. Если бы все слагаемые были разными, мы получили бы заурядное число с суммой цифр, равной произведению сумм цифр исходных чисел. Посмотрим, получились ли какие-то слагаемые одинаковыми. Если $10^a \cdot 10^{N-b} = 10^x \cdot 10^{N-y}$, то $a+N-b=x+N-y$, откуда $a+y=b+x$. Так как a, b, x, y – степени двойки, равенство возможно лишь в случаях $a=x$, $b=y$ (но тогда это одно и то же слагаемое) и $a=b$, $x=y$. Поэтому у нас будет всего 10 одинаковых слагаемых, равных 10^N, в сумме они дадут 10^{N+1}.

Никакие другие слагаемые не равны 10^{N+1}, так как у всех слагаемых показатель степени чётный. Поэтому сумма слагаемых будет заурядным числом, но сумма его цифр будет на 9 меньше произведения сумм цифр исходных чисел.

4. Чтобы из этих отрезков можно было составить треугольник, достаточно доказать, что наибольший из них (пусть это AC') меньше суммы двух других. Повернём треугольник $AB'C$ вокруг точки A на $60°$ так, чтобы точка C перешла в точку B. Точка B' перейдёт при этом в новую точку X (см. рисунок). Заметим, что в треугольнике $C'AX$ боковые стороны AC' и AX равны, а угол между ними больше $60°$. Тогда сторона $C'X$ в нём наибольшая, но она не превосходит $C'B+BX$ по неравенству треугольника. Значит, $AC' < C'X \leqslant C'B+BX$.



5. Ответ: да. Упорядочим числа каждого цвета по возрастанию. Красные числа ещё и разобьём на две части: первые 25 назовём *малыми*, а следующие 25 – *большими*. Докажем, что можно взять в качестве k-й четвёрки k-е жёлтое и k-е зелёное числа и из красных k-е малое и k-е большое.

Действительно, k-е жёлтое число больше, чем хотя бы k из красных чисел (по одному из каждой тройки, в которую входят первые k жёлтых чисел). Значит, оно больше k-го малого красного числа. Аналогично, k-е жёлтое число меньше k-го большого красного числа (докажите!). Те же рассуждения справедливы для k-го зелёного числа.

6. а) Ответ: для любого. Предположим противное – есть четыре арифметические прогрессии A, B, C и D, причём A и B не пересекаются и дают в объединении X, и C и D – тоже. Можно считать, что у прогрессии A разность a не больше, чем у каждой из остальных.

Ясно, что A не совпадает ни с C, ни с D – иначе разбиения совпадают. Тогда A и не содержится целиком ни в C, ни в D (так как у A наименьшая разность). Значит, A пересекается и с C, и с D.

Пусть число x лежит в пересечении A и C, тогда ни одно из чисел $x-a$ и $x+a$ не лежит в C (иначе A совпадала бы с C). Значит, они оба лежат в D, а разность прогрессии D – делитель числа $2a=(x+a)-(x-a)$, причём не меньший a, то есть это $2a$ или a. Последнее невозможно, поскольку A не совпадает с D. Аналогично получаем, что разность прогрессии C равна $2a$. Тогда прогрессии C и D в объединении дают A, а прогрессия B отсутствует – противоречие.

б) Ответ: не для любого. Пусть X – все целые числа, дающие остатки 0, 3, 4, 6, 8 или 9 при делении на 12. Первое разбиение: все числа, кратные 3; все числа с остатком 4 от деления на 12; все числа с остатком 8 от деления на 12. Второе разбиение: все числа, кратные 4; все числа с остатком 3 от деления на 6; все числа с остатком 6 от деления на 12.

Докажем, что на две прогрессии разбить X нельзя. Предположим противное. Тогда минимум четыре числа из 0, 3, 4, 6, 8, 9, 12 принадлежат одной прогрессии. Значит, минимум два из них лежат «с одной стороны» от 6, и поэтому разность этой прогрессии – это 1, 2, 3 или 4. Первые два случая невозможны (возникнут лишние числа), а в остальных двух случаях оставшееся множество – не прогрессия.

7. У каждого параллелограмма с горизонтальными сторонами покрасим верхнюю сторону в синий цвет, а нижнюю – в красный. То же сделаем со всеми имеющимися горизонтальными сторонами треугольников (если треугольник снизу от стороны, красим её в синий, иначе – в красный). А если у 100-угольника есть горизонтальные стороны, то их покрасим наоборот: верхнюю в красный цвет, а нижнюю – в синий.

Теперь каждый горизонтальный отрезок покрашен один раз в синий цвет («снизу») и один раз в красный («сверху»), поэтому синего и красного цвета мы потратили поровну. Но ведь и в каждом параллелограмме, и в нашем 100-угольнике синего и красного цвета было использовано поровну. Поэтому если их стереть и оставить только два треугольника, то в них тоже синего и красного поровну. Другими словами, если у одного есть синяя горизонтальная сторона какой-то длины, то у другого есть красная горизонтальная сторона такой же длины!

Аналогично докажем, что остальные стороны треугольников попарно равны. Следовательно, они равны по трём сторонам.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Третий этап состоит из четырёх туров (с IX по XII) и идёт с мая по август.

Высылайте решения задач X тура, с которыми справитесь, не позднее 5 июля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

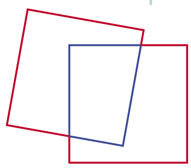
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

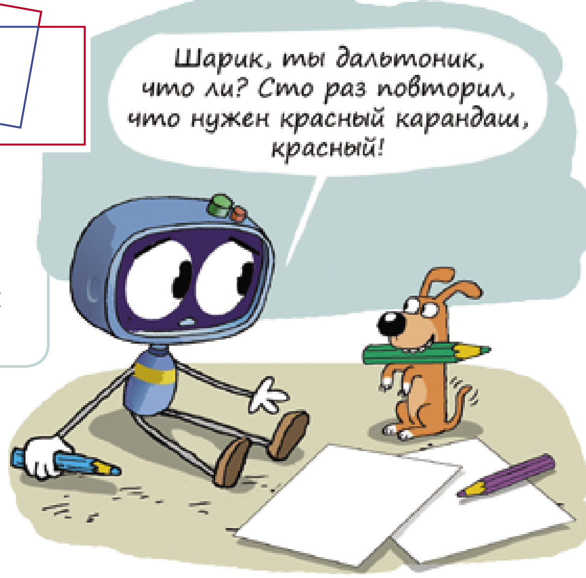
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

X ТУР

46. Квантик положил два одинаковых квадрата на стол так, что они налегают друг на друга, но не совпадают. Затем он обвёл красным карандашом получившуюся фигуру, а оставшиеся части сторон квадратов обвёл синим карандашом. Оказалось, что периметр красной фигуры в полтора раза больше периметра синей. Во сколько раз периметр красной фигуры больше периметра одного квадрата?





47. Барон Мюнхгаузен утверждает, что можно выписать на доску в некотором порядке 9 различных цифр и поставить между некоторыми из них знак «+» так, чтобы результат был равен 2023. Не ошибается ли барон?

Авторы: Георгий Караваев (46, 50), Михаил Евдокимов (47), Марина Хачатурян (48), Сергей Полозков (49)

48. В белом клетчатом листочке 10×10 одну клетку закрасили красным. Затем листочек сложили несколько раз по линиям сетки и диагоналям клеток, проткнули иголкой и развернули. Могло ли случиться, что внутри каждой белой клетки, не на сгибах, есть точка прокола, а внутри красной клетки прокола нет?

49. Емеля перемещается только на печи, которая ездит на дровах – полено на километр – и вмещает 60 поленьев. Вчера Емеля выехал на печи из дома, на некотором расстоянии от него сделал склад поленьев, после чего вернулся обратно. Сегодня Емеля снова набрал поленьев, выехал из дома, проехал через склад… и не вернулся – кончились поленья. Как далеко от дома он мог оказаться? Найдите наибольшее возможное расстояние.

50. Круг разделили двумя перпендикулярными хордами на 4 части. Могли ли их площади равняться 2022, 2023, 2024 и 2025 см^2?

Художник Николай Крутиков

ТЁМНАЯ СТОРОНА ПЛАНЕТ

На плоскости расположены 9 «планет» – одинаковых кругов единичного радиуса. Будем называть точку на поверхности планеты *тёмной*, если из неё не видно никаких других планет. Чему равна суммарная длина тёмных частей всех планет?

А какой будет суммарная площадь тёмных частей, если планеты – неподвижные единичные шары в пространстве?

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986
9 772227 798237 23006