№ 4 | апрель 2023
Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования
e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 4
апрель 2023

ДЖОН ДАЛЬТОН И ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ

ОКРУЖНОСТЬ ДЕВЯТИ ТОЧЕК

ЛЕГКО ЛИ СТАТЬ ДЕРЕВОМ

Enter

ОТКРЫЛАСЬ ПОДПИСКА
на 2-е полугодие 2023 года

подписаться на ***журнал «КВАНТИК»*** *вы можете в почтовых отделениях и через интернет*

ОНЛАЙН-ПОДПИСКА НА САЙТАХ

Почта России:
podpiska.pochta.ru/press/ПМ068

Агентство АРЗИ:
akc.ru/itm/kvantik

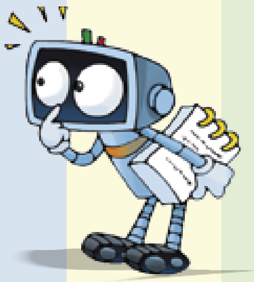
БЕЛПОЧТА:
kvan.tk/belpost

по этим ссылкам вы можете оформить подписку и для своих друзей, знакомых, родственников

ПОДПИСКА В ПОЧТОВЫХ ОТДЕЛЕНИЯХ

ПОЧТА РОССИИ

индекс **ПМ068**



БЕЛПОЧТА

индексы:
14109 – для физических лиц
141092 – для юридических лиц

Подробно обо всех способах подписки, в том числе о подписке в некоторых странах СНГ и других странах, читайте на нашем сайте **kvantik.com/podpiska**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
vk.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com

Журнал «Квантик» № 4, апрель 2023 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Т.А. Корчемкина, Е.А. Котко, Г.А. Мерзон, М.В. Прасолов, Н.А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»

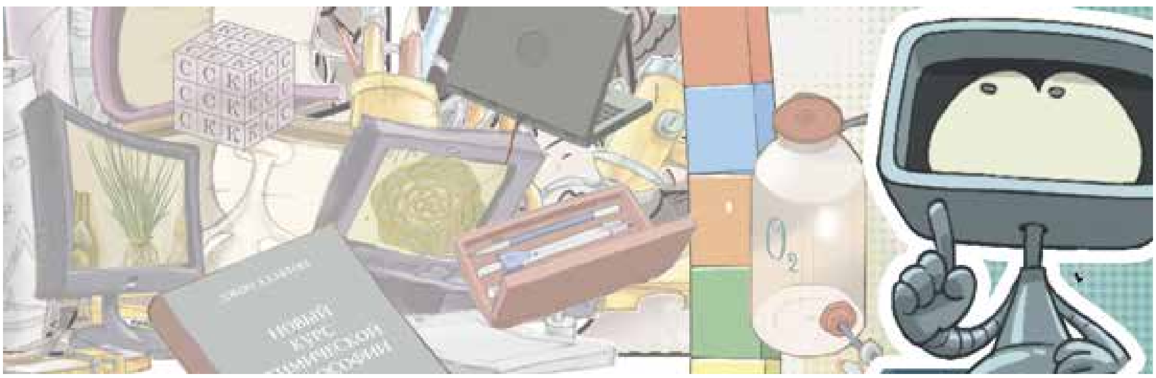
Подписка на журнал в отделениях почтовой связи
- **Почта России:** Каталог Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)
- **Почта Крыма:** Каталог периодических изданий Республики Крым и г. Севастополя (индекс **22923**)
- **Белпочта:** Каталог «Печатные СМИ. Российская Федерация. Казахстан» (индексы **14109** и **141092**)

Онлайн-подписка на сайтах
- Почта России: **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**
- агентство АРЗИ: **akc.ru/itm/kvantik**
- Белпочта: **kvan.tk/belpost**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11. Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Формат 84х108/16 Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 02.03.2023
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8. Тел.: (831) 218-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

НАГРАДЫ ЖУРНАЛА
ПРЕМИЯ «ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ» за лучший детский проект о науке 2017
БЕЛЯЕВСКАЯ ПРЕМИЯ за плодотворную работу и просветительскую деятельность 2021
ПРЕМИЯ РАН художникам журнала за лучшие работы в области популяризации науки 2022

СОДЕРЖАНИЕ



Алексей Толпыго

Давайте что-нибудь прибавим...

В этой небольшой заметке рассматривается один забавный способ решения задач (главным образом – задач на делимость). Я начну с так называемой «задачи Дирака», текст (и квази-решение) приведу по статье известного советского физика Березинского[1].

«Три рыбака ловили рыбу на уединённом острове. Рыба бодро клевала наживку, рыбаки увлеклись и не заметили, что пришла ночь и спрятала под своим покровом гору наловленной рыбы. Пришлось заночевать на острове. Двое рыбаков быстро заснули, каждый прикорнув под своей лодкой, а третий, немного подумав, понял, что у него бессонница, и решил уехать домой. Своих товарищей он не стал будить, а разделил всю рыбу на три части. Но при этом одна рыба оказалась лишней. Недолго думая, он швырнул её в воду, забрал свою часть и уехал домой.

Среди ночи проснулся второй рыбак – он торопился в другую задачку. Он не знал, что первый рыбак уже уехал, и тоже поделил всю рыбу на три равные части, и конечно, одна рыба оказалась лишней. Оригинальностью и этот рыбак не отличался – закинул он её подальше от берега и со своей долей поплёлся к лодке.

Третий рыбак проснулся под утро. Не умывшись и не заметив, что товарищей уже нет, он побежал делить рыбу. Разделил её на три равные части, швырнул одну лишнюю рыбу в воду, забрал свою долю и был таков.

В задаче спрашивалось, какое наименьшее количество рыб могло быть у рыбаков.

Дирак[2] предложил такое решение: рыб было минус две. После того как первый рыбак совершил антиобщественный поступок, швырнув одну рыбу в море, их стало $(-2)-1=-3$. После этого он ушёл, тяжело отдуваясь и унося под мышкой минус одну рыбу. Рыб стало $(-3)-(-1)=-2$. Второй и третий рыбаки просто повторили нехороший поступок своего товарища».

... А теперь подумаем, как на самом деле нужно решать эту задачу.

[1] Пути в незнаемое. Писатели рассказывают о науке. Сборник 3. М.: Советский писатель, 1963.

[2] Поль Дирак – знаменитый физик-теоретик, «отец» квантовой механики.

Если б не было условия о «лишних» рыбах и число рыб каждый раз нацело делилось на 3, то решение почти очевидно. Достаточно (и необходимо), чтобы число рыб делилось на 3^3: например, если рыб было 27, то после первого дележа останется 18, после второго 12 и после третьего 8. Но это решение неправильное, так как не соответствует условию задачи.

С другой стороны, решение Дирака математически верно и, более того, является наилучшим (оно обобщается на любое число рыбаков), но, к сожалению, не имеет никакого смысла.

Как же быть? Очень просто: надо эти два решения **сложить.** Имеем: $(-2)+27=25$. Действительно, теперь получается, что одна рыба была лишней, первый рыбак её выбросил, забрал 8 – осталось 16. Второй забрал 5 и осталось 10; третий забрал 3.

Выходит, «нелепое» решение Дирака помогает решить задачу. Общий же ответ таков: число рыб должно было равняться $(-2)+N$, где N делится на 27. То есть рыб могло быть 25, 52, 79 и т. д.

Оказывается, способ «сложим бессмысленное решение с неправильным и получим верное» годится для разных задач. Приведём несколько примеров.

Задача 1. Найти 99 последовательных натуральных чисел, из которых первое делится на 100, второе делится на 99, ..., последнее делится на 2.

Очевидно, годятся числа $-100, -99, -98, \dots, -2$. К сожалению, они не натуральные. Поправим положение, добавив слагаемое, делящееся на все эти числа, например, $100! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 100$. Получаем ответ (не единственный и не наименьший, но самый простой): подходят числа $100!-100,\ 100!-99,\ \dots,\ 100!-2$.

Задача 2. Найти 5 последовательных натуральных чисел, из которых первое делится на 3, второе на 5, затем на 7, 9 и 11.

Годятся числа 3/2, 5/2, 7/2 и т. д. (ряд можно продолжить неограниченно). С делимостью всё в порядке, вот только и числа, и частные полуцелые. Поправим положение, добавив к каждому числу $\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2}$ (впрочем, достаточно взять $\frac{5\cdot 7\cdot 9\cdot 11}{2}=1732\,\frac{1}{2}$).

Примерно тем же способом решается ещё одна известная задача – «задача про полчеловека».

Задача 3. По городу ехал автобус, в нём было несколько пассажиров. На первой остановке вышла половина всех пассажиров и ещё полчеловека. На второй вышла половина всех оставшихся пассажиров и ещё полчеловека. То же самое произошло на третьей остановке, после чего в автобусе не осталось ни одного пассажира. Сколько их было вначале?

Тут, правда, прибавлять ничего не нужно; главная трудность – в этом «полчеловеке», который создаёт впечатление бессмысленности условия. На самом же деле надо просто решить три линейных уравнения:

$$\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=y; \qquad \frac{1}{2}y-\frac{1}{2}=z; \qquad \frac{1}{2}z-\frac{1}{2}=0,$$

откуда $z=1$, $y=3$, $x=7$. И никаких «полчеловеков»! Просто половинка человека складывается с половиной числа пассажиров – и люди становятся целыми.

А если бы в задаче не было условия о том, что после трёх остановок в автобусе не осталось никого? Тогда проще всего было бы начать с решения $x=-1$ (в этом случае после каждого «выхода половины и ещё полчеловека» в автобусе по-прежнему был бы минус один пассажир), а общее решение получилось бы из него прибавлением кратного восьми: $x=7, 15, 23...$

Задача 4. Найти 100 последовательных чисел, из которых первое делится на 3, второе на 5, третье на 7, ..., последнее на 201.

Рассмотренные задачи – пока что просто головоломки. Но тот же метод применяется и в «серьёзной» математике. В частности, напомним известную теорему:

Теорема. Существует сколь угодно длинный (конечный) ряд из последовательных чисел: k, $k+1$, $k+2$, ..., $k+n$, в котором все числа составные.

Воспользуемся сначала таким определением составного числа: m составное, если оно делится на какое-нибудь число, большее 1. При таком определении доказательство очевидно: берём ряд 2, 3, 4, ... (сколь угодно большой длины); в нём 2 делится на два, 3 – на три и т. д. Выходит, все числа составные, а простых вообще не существует – как же так? Ошибка в том, что в нашем «определении» мы забыли упомянуть очень важную вещь: «делится, *и частное больше* 1».

Но это можно поправить уже известным нам способом! Возьмём именно этот ряд чисел и добавим к нему что-нибудь, делящееся на все нужные нам числа. Допустим, например, что мы хотим получить ряд из составных длины 1000; итак, берём натуральные числа от 2 до 1001 включительно и добавим к ним, например, число $1001! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot 1001$. Делимость на все числа от 2 до 1001 при этом не нарушается, а все частные стали больше 1, так что это доказательство уже вполне корректно.

Замечание. Вовсе не обязательно начинать с двойки. Можно, например, взять целые числа от 1001 до 2000; только добавлять придётся уже другое число.

Ещё один пример – поиск чисел *харшад*. Так называются целые числа, которые больше 10 и делятся на сумму своих цифр (например, 224, 506 и т.п.) [3].

Задача 5. Найти 5 последовательных чисел харшад.

Если числа идут по порядку, то и их суммы цифр тоже, пока не произойдёт «перескок» в разряде. Поэтому нетрудно подобрать числа, делящиеся на последовательные; например, 30, 31, 32, ..., 39, они делятся сами на себя. Беда только в том, что делители не те: нужно, чтобы они делились не на 30, 31, ..., а на 3, 4, ... – на числа, которые на 27 меньше.

Но это и подсказывает решение. Надо к этим числам добавить что-то, делящееся на 30, 31 и т. д., с суммой цифр 27. После некоторых усилий обнаруживаем, что подходит, например, 15 651 900 000. Тогда искомые числа – это 15 651 900 030, 15 651 900 031 и т.д.

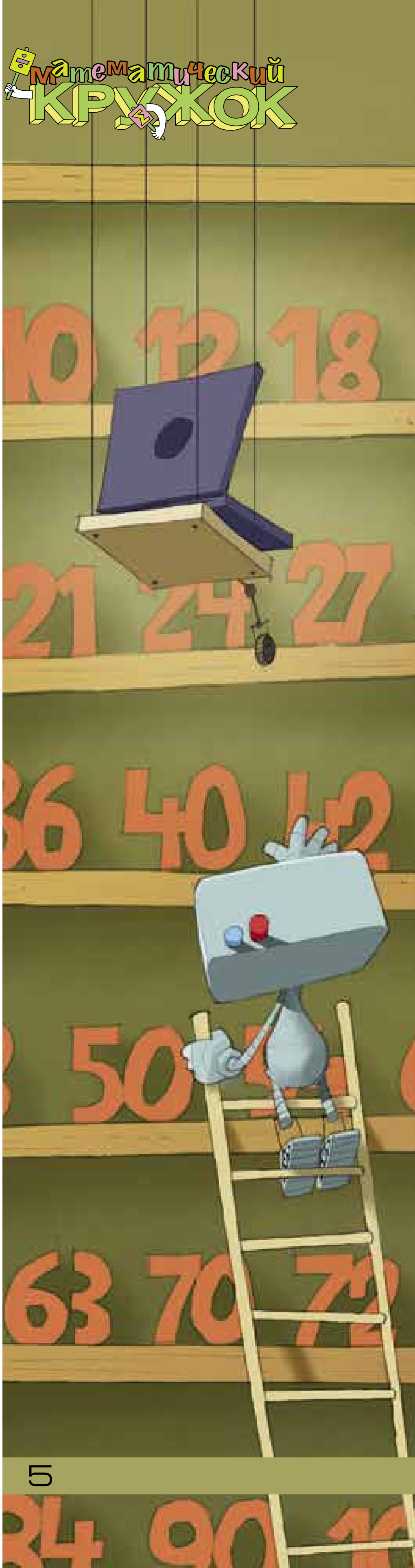
Задача 6. Найдите 5 последовательных чисел, из которых первое делится на 2, второе на 5, третье на 8, четвёртое на 11 и пятое на 14.

Задача 7. Найдите 10 чисел харшад подряд.

(*Указание*: начинать надо не с 30, а с числа побольше, например с числа 120.

Замечание. Найти подряд более 10 чисел уже несравненно труднее – из-за «перескока» в разрядах; более того, нетрудно доказать, что подряд может стоять не более 20 чисел харшад.)

[3] Слово «харша» заимствовано из санскрита и означает «великая радость»; название этим числам придумал индийский математик Д. Р. Капрекар. Несколько подробнее об этих числах рассказано в статье А. Толпыго «Числа харшад» в «Кванте» № 10 за 2020 год.



Художник Алексей Вайнер

Пётр Волцит

ЛЕГКО ЛИ СТАТЬ ДЕРЕВОМ

В «Квантике» № 3 за 2023 год мы познакомились с плаунами – одними из самых архаичных растений, умудрившихся дожить до наших дней. Сегодня отдел плауновидных включает всего три группы: собственно плауны, селягине́ллы и полу́шники.

Селягинеллы внешне очень похожи на плауны, иной раз их даже трудно отличить друг от друга.

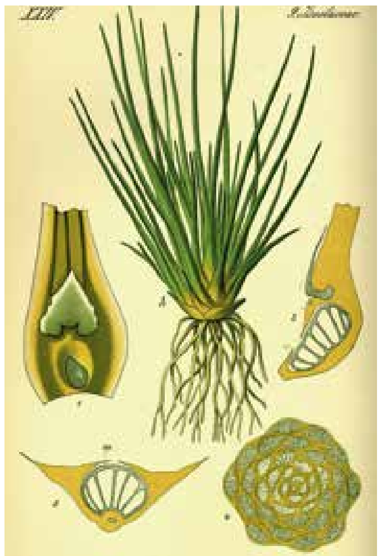
Селягинелла

Плаун-баранец

Полушники вы с плаунами не спутаете – хотя бы потому, что они растут в воде, в чистых озёрах с песчаным дном. (Правда, за пределами России – в Америке и Средиземноморье – есть виды, растущие во влажных местах на суше.) Но их можно принять за какое-то водное цветковое растение, если не заметить спорангии в основании листьев.

В общем, все современные плауновидные – невысокие травки, редкие, не играющие особенно важной роли в природе. Но когда-то среди них встречались на-

Полушник озёрный



Строение полушника. Видны спорангии в основании листьев

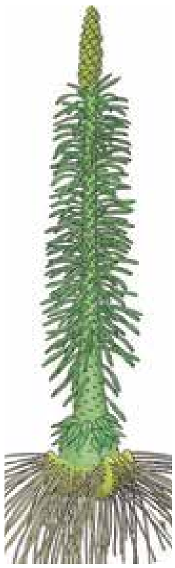
стоящие деревья, и они были самыми важными организмами на суше. Дело было в конце девонского и начале каменноугольного периодов...

Тогда на Земле возникли *лепидодéндроны* – огромные деревья до 50 метров высотой и до метра в диаметре. Устроены они были ужасно примитивно: их побеги и корни ветвились дихотомически (чем это плохо, мы рассказывали в «Квантике» №3 за 2023 год), древесина медленно проводила воду, тонкая кожица листьев легко её испаряла. Поэтому лепидодендроны могли расти только во влажном климате.

Лепидодендрон: реконструкция общего вида растения и его ветви; окаменевшая кора с чешуйками на месте опавших листьев. (Отсюда пошло название растений – в переводе с греческого «чешуедрево».)

Правда, кое в чём им удалось продвинуться по пути эволюции дальше других. Например, их споры уже были неодинаковы: из крупных макроспор развивались женские заростки, а из мелких – мужские. Это первый шаг на долгом пути к образованию семени. До которого, впрочем, эволюция лепидодендронов не дошла – опять неудача!

Вскоре после появления лепидодендронов, уже в каменноугольном периоде, от папоротников произошли первые голосеменные растения и стали теснить непутёвые лепидодендроны. Те начали мельчать – триасовая *плевромейя* едва достигала 2 метров в высоту – и всё глубже уходить в воду. И в итоге превратились... в полушники. Да, современные полушники – измельчавшие потомки древних лепидодендронов или их ближайших родственников.

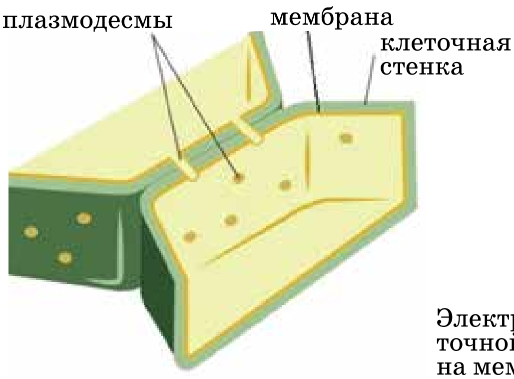


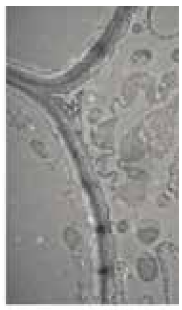
Плевромéйя

Стать деревьями было весьма непросто. Растениям пришлось преодолевать

сложности, которые создавала… главная особенность строения их клеток.

Мы знаем, что клетки растений окружены прочной целлюлозной оболочкой – словно закованы в панцирь. Чтобы не оказаться отрезанными друг от друга и сохранить возможность обмениваться различными веществами, клетки соединены своего рода мостиками – *плазмоде́смами*. Эти тонкие трубочки тянутся от клетки к её соседке, пронзая целлюлозные оболочки обеих. Снаружи трубочки покрыты мембраной – такой же, как мембрана клетки; собственно, это её продолжение. Внутри они заполнены цитоплазмой, а в центре плазмодесмы пролегает ещё один мембранный канал. Или, если хотите, кабель – для передачи информации. Да, когда клетки листовых примордиев подают соседкам «команды», сигнальные вещества передаются именно через плазмодесмы.



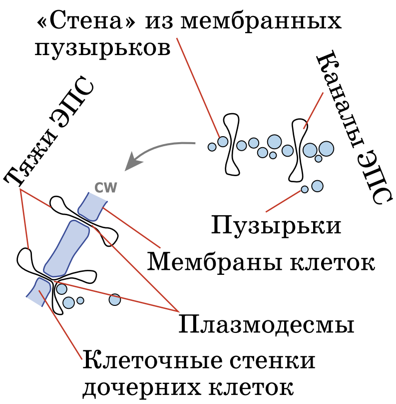


Электронное микрофото клеточной стенки, тёмные точки на мембране – плазмодесмы

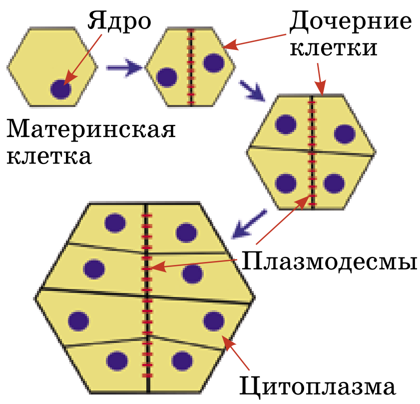
Плазмодесмы – цитоплазматические тяжи, соединяющие содержимое соседних клеток. Они проходят через клеточную стенку и представляют собой узкие каналы, выстланные плазматической мембраной

!!! Не путайте мембрану и оболочку! Мягкая мембрана из жироподобных веществ окружает все клетки от животных до бактерий и у всех устроена принципиально сходно. А оболочка (клеточная стенка) – это то, что «надето» поверх мембраны. У растений она состоит из целлюлозы, у грибов – из хитина. А у животных она отсутствует; наши клетки жёсткого панциря лишены.

Плазмодесмы образуются на заключительном этапе деления клетки. Собираясь отгородиться друг от друга, дочерние клетки выстраивают между собой «стенку» из мембранных пузырьков. Затем пузырьки сливаются в единую мембрану (точнее, в две – одной клетки и дру-



Механизм образования плазмодесм



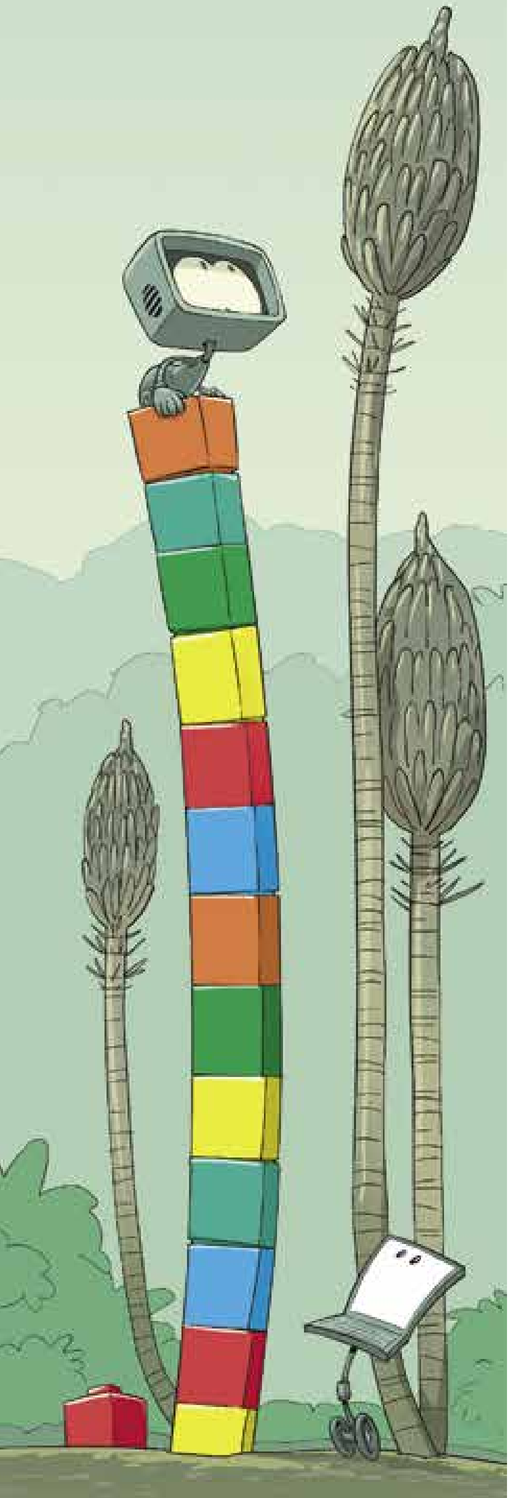
Падение числа первичных плазмодесм при делении клеток

гой), но там, где между ними проходили тяжи каналов эндоплазматической сети (ЭПС), остаются перемычки – они и становятся плазмодесмами.

Нетрудно догадаться, что если при разделении материнской клетки между её «дочками» заложилось, допустим, 1000 плазмодесм, то при следующем делении, если оно пройдёт в плоскости, перпендикулярной плоскости первого деления, между «внучками» останется примерно по 500 плазмодесм. Между «правнучками» – 250, и так далее. В итоге после очень небольшого числа делений клетки фактически останутся без связи. Что же делать?

Логически существует два варианта. Первый – заложить при первом делении так много плазмодесм, чтобы их хватило на много поколений клеток. Но в итоге всё равно «упереться» в предел делений. Второй – научиться «проковыривать» в оболочках дырочки и создавать вторичные плазмодесмы. И со спокойной душой делиться до бесконечности.

Самые эволюционно продвинутые растения – цветковые и голосеменные – «выбрали» второй вариант. Именно это позволило им стать высокими толстыми деревьями. Каждый год ствол сосны или дуба нарастает в толщину с помощью *ка́мбия* – слоя недифференцированных клеток, способных неограниченно делиться. Клетки камбия делятся многие годы – даже тысячи лет! – откладывая всё новые слои древесины и коры, но число плазмодесм между клетками не уменьшается: они умеют образовывать новые.



А вот папоротники и хвощи делать вторичные плазмодесмы так и не «научились». (Некоторые ботаники считают, что «разучились», но мне это кажется сомнительным. Впрочем, этот вопрос пока не решён окончательно.) Поэтому среди папоротников и хвощей нет деревьев, только травы. Потому что рано или поздно запас плазмодесм, заложенный при отделении дочерней клетки от инициальной (см. статью в «Квантике» № 3 за 2023 г.), расходуется. И клетки побега уже не могут делиться и образовывать новые клетки. В том числе не могут наращивать толщину побега.

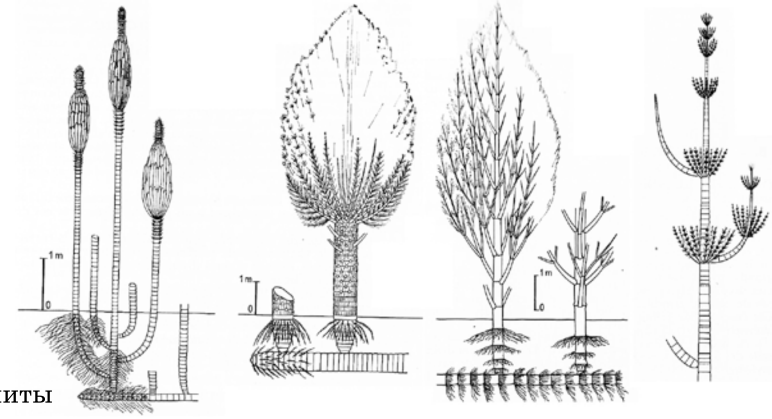

Древовидные папоротники

Да, бывают древовидные папоротники. Они росли ещё в каменноугольном периоде и растут во влажных лесах до сих пор. Но обратите внимание: их стволы не утолщаются в течение жизни. Достигнув в молодости, ещё на уровне земли, определённой толщины, ствол сохраняет постоянный диаметр до конца жизни. При этом не расти вверх он не может – надо же образовывать новые листья. И в итоге рано или поздно тонкое основание ствола не выдерживает веса верхушки, и папоротник заваливается.

В каменноугольный период существовали и древовидные родственники хвощей – калами́ты. Их стволы, отраставшие от подземных корневищ, порой достигали высоты 20 метров – выше яблони, вишни и многих других настоящих деревьев. Но и они не умели утолщать ствол после того, как он вырос. Утолщение происходило только в момент формирования молодого побега: чуть ниже апекса ещё слабодифференцированные клетки интенсивно делились и образовывали толстый ствол.

Обратите внимание: вертикальные побеги каламитов в самом низу (где они только образовались из почки) тонкие, затем, ещё в подземной части, резко расширяются, а далее их толщина остаётся неизменной.

А вот лепидодендроны утолщаться умели, у них был камбий (даже два – для коры и для древесины). И за счёт вторичного утолщения ствола и корней они



Каламиты

могли и на 50 метров вверх вырасти, и удержать тяжелеющую с каждым годом крону.

Полушники унаследовали от предков способность образовывать вторичные плазмодесмы. У них сохраняется даже слабо работающий камбий – иногда он образует новые клетки проводящих тканей.

Есть вторичные плазмодесмы и у плаунов (в узком смысле), хотя их предки, судя по всему, никогда не были деревьями и на камбий у них нет даже намёка. Они так и не сумели «пустить в дело» способность клеток делиться до бесконечности.

А вот у селягинелл вторичные плазмодесмы не образуются. Видимо, не было их и у их предков. Хотя кое в чём селягинеллы «вышли вперёд» плаунов. У плаунов споры одинаковые, а у селягинелл, как и у лепидодендронов с полушниками, разные: макро- и микро-.

Вот так причудливо сочетаются в разных группах древних растений примитивные и продвинутые признаки. И лишь те растения, которые смогли «собрать в себе все передовые технологии», добились эволюционного успеха. Это голосеменные и их потомки – цветковые. А на короткое время добиться процветания удалось и лепидодендронам. Как это помогло планете, мы расскажем в следующих номерах журнала.

Задача. Иногда древовидным папоротникам всё же удаётся нарастить толщину своего ствола. Как? Подскажет это фото – спил ствола старого древовидного папоротника диксонии антарктической. (Живёт она не в Антарктиде, но в Южном полушарии: на юго-востоке Австралии и на Тасмании, где в горах выдерживает морозы до –5 °C.)

Художник Мария Усеинова

Математический кружок

Александр Блинков

Окружность девяти точек

Познакомимся с одним из красивых фактов геометрии треугольника – теоремой об ***окружности девяти точек***, называемой ещё ***окружностью Эйлера***.

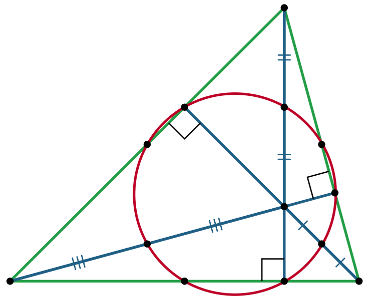


Рис. 1

Теорема. *Середины сторон треугольника, основания его высот и середины отрезков, соединяющих ортоцентр (точку пересечения высот) с вершинами треугольника, лежат на одной окружности (рис.* 1*).*

Мы приведём один из самых простых способов её доказать. Нам понадобятся несколько фактов из школьного курса геометрии:

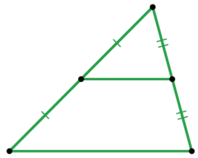


Рис. 2

1. Средняя линия треугольника параллельна его стороне (рис. 2).

2. Две прямые, соответственно параллельные перпендикулярным прямым, перпендикулярны (рис. 3).

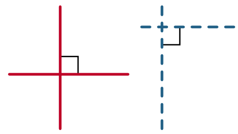


Рис. 3

3. Точка C лежит на окружности с диаметром AB тогда и только тогда, когда угол ACB прямой (рис. 4).

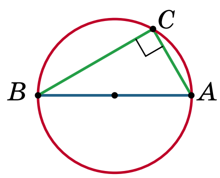


Рис. 4

4. Диагонали прямоугольника являются диаметрами его описанной окружности (рис. 5).

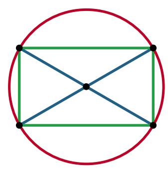


Рис. 5

Теперь мы готовы доказать теорему.

Доказательство. Рассмотрим остроугольный треугольник ABC и его высоты, пересекающиеся в точке H (чтобы не загромождать чертёж, полностью проведём только высоту BB_1). Пусть K и L – середины сторон AB и AC, а P и Q – середины отрезков BH и CH (рис. 6*а*).

Заметим, что KL – средняя линия треугольника BAC, значит, $KL \parallel BC$, а PQ – средняя линия треугольника BHC, значит, $PQ \parallel BC$. Поэтому $KL \parallel PQ$. Аналогично, KP и LQ – средние линии треугольников ABH и ACH, поэтому $KP \parallel AH \parallel LQ$. Тогда стороны четырёхугольника $KLQP$ соответственно параллельны перпендикулярным прямым BC и AH, то есть $KLQP$ – прямоугольник.

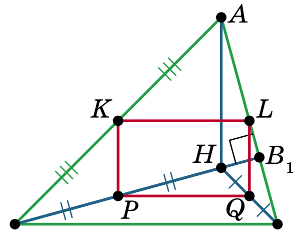


Рис. 6а

Рассмотрим окружность, описанную около $KLQP$, его диагонали – диаметры этой окружности. Угол PB_1L, опирающийся на диаметр PL, прямой, поэтому B_1 тоже лежит на этой окружности.

Таким образом, уже доказано, что пять из девяти точек лежат на одной окружности.

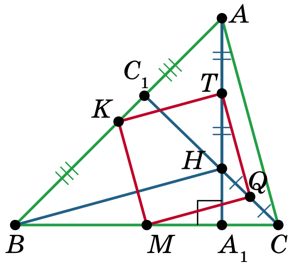


Рис. 6б

Рассмотрим теперь вместо точек L и P середины M и T отрезков BC и AH, а вместо точки B_1 – основание A_1 высоты, проведённой из вершины A (рис. 6б). Аналогично доказывается, что $KMQT$ – прямоугольник. Но он имеет общую диагональ KQ с прямоугольником $KLQP$, поэтому их описанные окружности совпадают, то есть M и T лежат на нашей окружности. Точка A_1 лежит на ней же, так как диаметр TM виден из A_1 под прямым углом.

Осталась последняя точка: основание C_1 высоты, проведённой из вершины C, которая лежит на той же окружности, так как $\angle KC_1Q = 90^\circ$ (KQ – диаметр).

Случай остроугольного треугольника разобран. Прямоугольники $KLQP$ и $KMQT$ часто называют ***прямоугольниками Эйлера***. Понятно, что существует ещё один такой прямоугольник: $LMPT$.

Найдём теперь радиус окружности девяти точек. Пусть R – радиус описанной окружности треугольника ABC. Заметим, что срединный треугольник (его вершины – середины сторон ABC) вписан в окружность девяти точек (рис. 7). Но его стороны в два раза меньше сторон исходного, поэтому он подобен треугольнику ABC с коэффициентом 0,5. Значит, радиус окружности девяти точек равен $0{,}5R$.

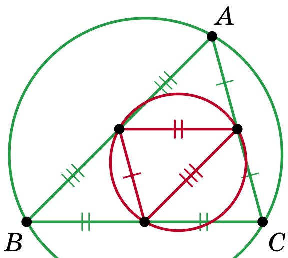
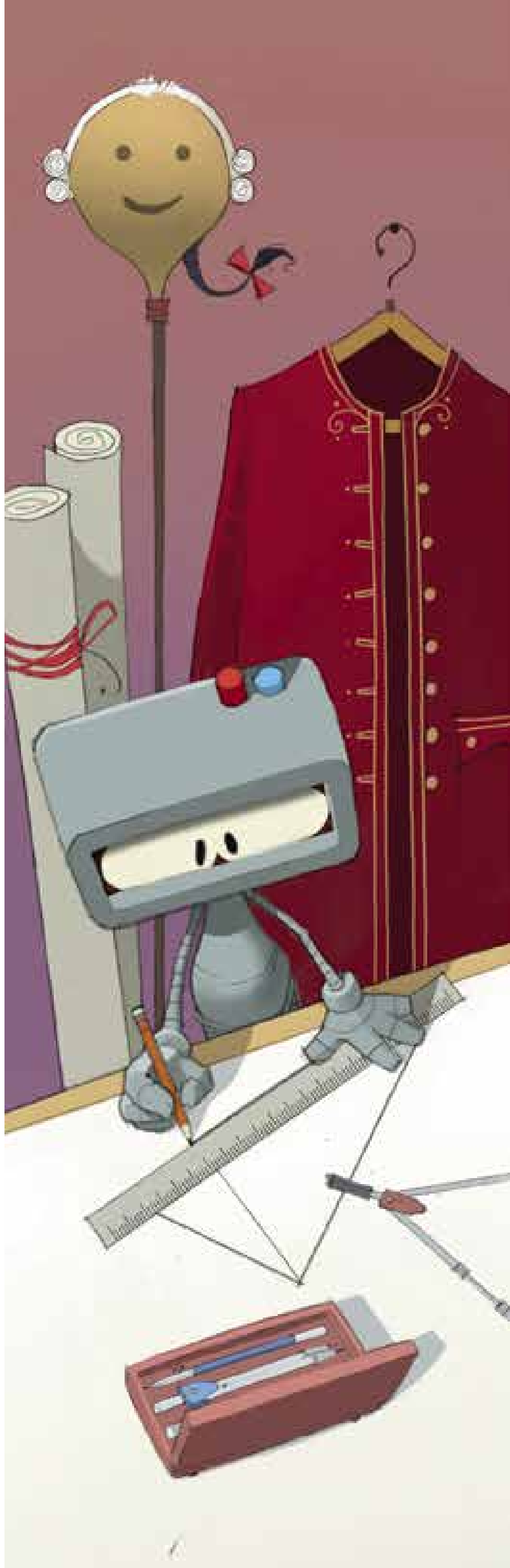
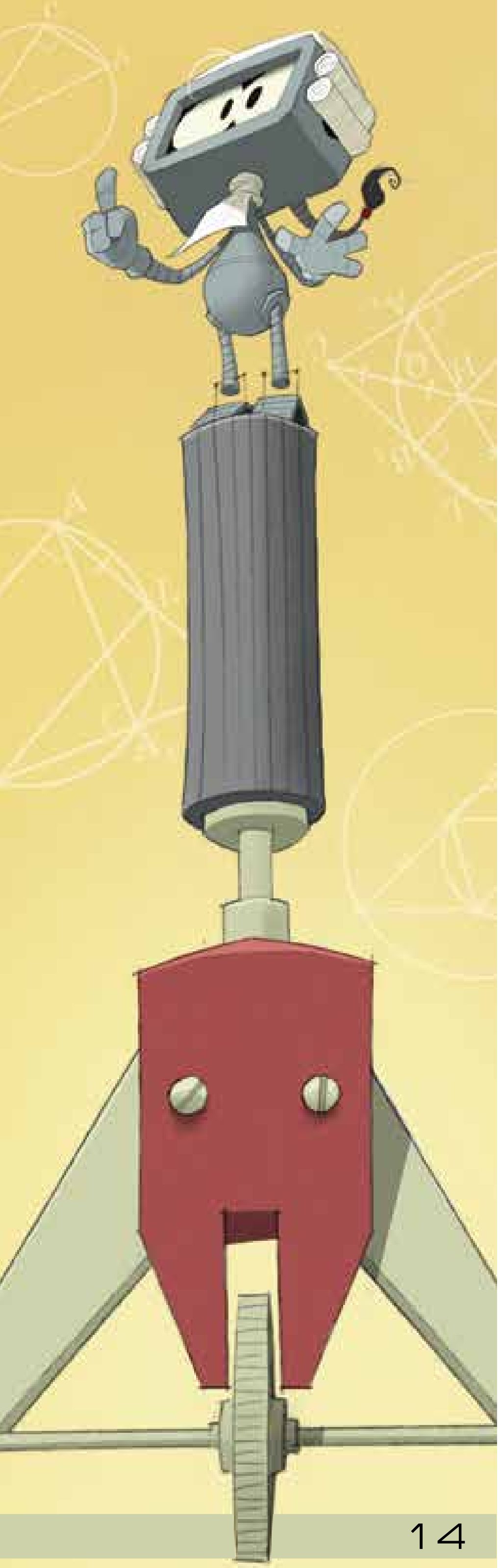


Рис. 7

Отметим, что мы доказали теорему для остроугольного треугольника. Нужно ли отдельно рассматривать случай тупоугольного треугольника? Для ответа на





этот вопрос заметим, что если H – ортоцентр остроугольного треугольника ABC, то A – ортоцентр тупоугольного треугольника BHC (рис. 8). Действительно, HA_1, BC_1 и CB_1 – высоты треугольника BHC. При этом у треугольника BHC та же самая окружность девяти точек, так как середины K и L сторон AB и AC просто меняются «ролями» с серединами P и Q отрезков BH и CH, а «роли» остальных точек не меняются!

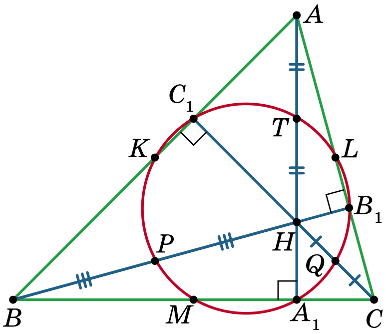


Рис. 8

Точки A, B, C и H, любая из которых является ортоцентром треугольника, образованного тремя другими, обычно называют ***ортоцентрической четвёркой***. Таким образом, у четырёх треугольников ABC, BHC, AHB и AHC окружность девяти точек одна и та же.

Разберём, наконец, случай прямоугольного треугольника ABC ($\angle A = 90°$). Проведём окружность через середины K, L и M его сторон и убедимся, что она соответствует окружности девяти точек (рис. 9).

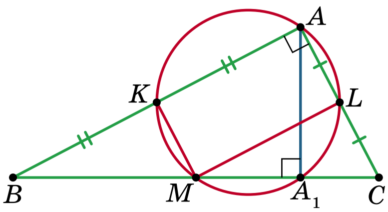


Рис. 9

Действительно, $KMLA$ – прямоугольник, поэтому эта окружность проходит через вершину A. То, что на окружности лежит основание A_1 высоты, доказывается как и выше. Но точек всего пять, где же остальные?

Их и не должно быть. Ведь A – ортоцентр треугольника, в этой точке совпадают основания двух высот и она же – «вырожденная» середина отрезка, соединяющего эту вершину с ортоцентром. А середины K и L сторон AB и AC совпадают с серединами отрезков, соединяющих вершины B и C с ортоцентром.

Напоследок вернёмся к случаю непрямоугольного треугольника. Как мы видели, шесть из девяти точек на окружности Эйлера разбиваются на три пары диаметрально противоположных. Выберем любую из этих шести точек и найдём расстояния до оставшихся трёх точек. Докажите, что два расстояния из трёх совпадут.

Художник Алексей Вайнер

Улыбнись

Владимир Красноухов

Калькулятор вместо градусника?

В последнее время стало модным после каждого чиха измерять температуру своего тела. Но что делать, если при этом под рукой нет градусника? Наш совет – не отчаивайтесь! Эту процедуру легко проделать с помощью обычного калькулятора. Проверим?

1. Включите калькулятор и поднесите его на пару секунд ко лбу.

2. Придумайте (из головы) любое четырёхзначное число, запишите его.

3. Занесите это число в калькулятор и припишите к нему точно такое же (не помножьте на 2, а именно припишите).

4. Полученное восьмизначное число разделите на 137.

(Напомним нашим читателям, что число 137 – это, если верить Википедии, «вселенская константа»: ведь *постоянная тонкой структуры*, которая описывает вероятность фундаментального физического процесса – поглощения или излучения электроном фотона – и обозначается первой буквой греческого алфавита α, примерно равна 1/137.)

5. Полученное после деления число разделите на четырёхзначное число из пункта 2.

6. Если вы хотите узнать температуру своего тела именно в градусах Цельсия – разделите полученное число пополам.

Что вы получили? (И почему?) Градусник, на всякий случай, не выбрасывайте, вдруг батарейка в калькуляторе сядет.

Желаем здоровья и успехов!

Художник Елена Цветаева

Самолётные тонкости

Авторы:
Максим Прасолов (1),
Александр Бердников (2, 3),
Алексей Воропаев (4)

1. Чтобы поднять самолёт в воздух, пилот тянет штурвал на себя, нос самолёта начинает подниматься, а потом шасси отрывается от полосы. Что происходит с самолётом, когда пилот тянет штурвал? Что заставляет нос самолёта подниматься?

2. Самолёт летел горизонтально и захотел подняться вверх. Для этого он маневрирует оперением на хвосте, а не на основных крыльях, почему? Что нужно сделать с этим оперением?

3. Оперение на концах основных крыльев всё же используется для поворотов. Каких?

4. При повороте самолёт сильно заваливается на бок. Почему пассажиры при этом не сваливаются в нижнюю половину салона, даже если они не пристёгнуты? А зачем самолёт так наклоняется?

Художник Мария Усеинова

ФРИЦ ГАБЕР

Марина Молчанова

Фриц Габер в 1891 году
(Fritz Haber)
9.12.1868 – 29.01.1934

Невозможно сказать, кто был величайшим химиком XX века. Разные люди дают разные ответы на этот вопрос. Лайнус Полинг, который отметился крупными открытиями в самых разных областях химии[1]? Фредерик Сенгер, без которого невозможно представить себе современную биохимию[2]? Мария Кюри, стоявшая у истоков радиохимии? Уотсон и Крик, открывшие двойную спираль ДНК?

А вот на вопрос о химике, работа которого сильнее всего повлияла на жизнь людей в XX веке, ответить легче. Многие скажут, что это Фриц Габер, немецкий химик, про которого говорили: «Он накормил миллиарды людей и убил десятки тысяч».

РАННИЕ ГОДЫ

Фриц Якоб Габер родился в городе Бреслау, который тогда входил в состав Германии – сейчас это польский город Вроцлав. Он был выходцем из состоятельной еврейской семьи, которая, однако, была включена в жизнь окружающего немецкого общества, и сам Габер всю жизнь считал себя в первую

[1] «Квантик», 2020, № 1.
[2] «Квантик», 2019, № 9.

Институт, где Габер работал много лет. 1912 г.

очередь немцем. Вплоть до прихода нацистов к власти в 1933 году, когда внезапно оказалось, что важно именно происхождение, а не то, кем человек себя считает...

Отец хотел, чтобы Фриц участвовал в семейном бизнесе, но сам Габер хотел учиться химии. И действительно учился в различных немецких университетах у знаменитых химиков, включая Роберта Бунзена (в честь которого, в частности, названа бунзеновская горелка – может быть, кто-нибудь из вас видел её в лаборатории). Потом, защитив диплом и приобретя химические знания, он всё же попытался поучаствовать в работе отцовской компании по производству красителей. Но из этого ничего не вышло, отец и сын окончательно переругались, и Габер полностью переключился на научную карьеру.

Фриц Габер в 1918 году

В ту пору Германия была мировым центром химической науки, так что Габер, многообещающий молодой учёный, с самого начала работал над важными и интересными темами. Химия углеводородов, электрохимия, химия красителей и тканей. Статьи, книги, лекции. Некоторые работы Габера конца XIX и самого начала XX века и сейчас считаются классическими.

Но самое главное было впереди.

УКРОЩЕНИЕ АЗОТА

Азот – один из основных химических элементов в живой природе. Но и один из главных в химической промышленности – и можно выделить две ключевые её отрасли, где нужно очень масштабное производство и где без азота никак. Одна из них выходит на первый план в мирное время. Это производство минеральных удобрений. Другая – в военное время. Это производство взрывчатых веществ.

Казалось бы, нет никаких проблем с доступностью азота для промышленности. Воздух вокруг нас состоит из него почти на 80 процентов. Выделить из воздуха чистый азот тоже не проблема. Но...

Установка Габера для синтеза аммиака

ВЕЛИКИЕ УМЫ

Азотные бактерии учат нас, что природа, со своими сложными формами химии живых организмов, всё ещё понимает и использует методы, которым мы пока не научились подражать.

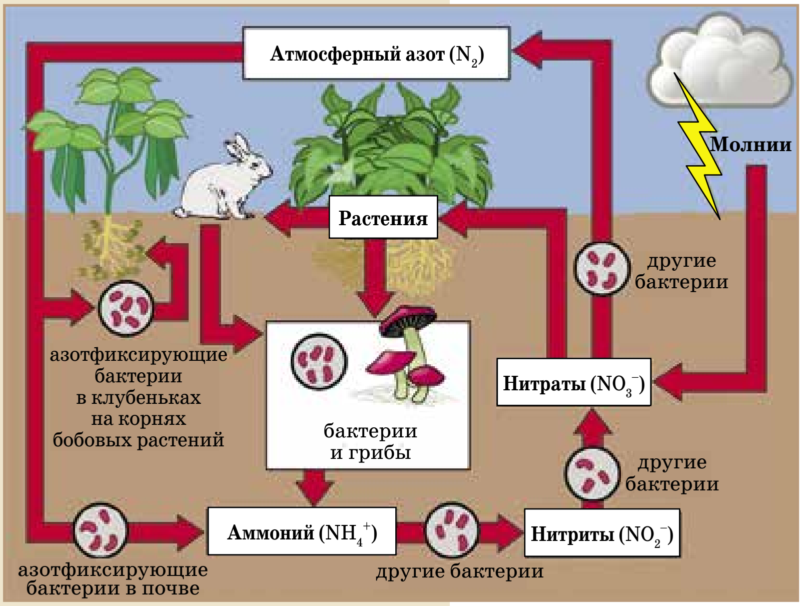
Ф. ГАБЕР

Азотфиксирующие бактерии поселяются в клубеньках на корнях бобовых растений

Реклама чилийской селитры (Португалия)

Дело в том, что газообразный азот вокруг нас состоит из двухатомных молекул, N_2. Чтобы получить из него нужные химические соединения (это называется *фиксацией азота*), нужно сперва разорвать связь между двумя атомами азота в молекуле. А это непросто: связь очень крепкая. В живой природе над этим работают многочисленные маленькие труженики – азотфиксирующие бактерии. В неживой природе небольшая часть азота фиксируется благодаря молниям. А вот людям предстояло самостоятельно придумать какой-то способ, который годился бы для промышленности.

Долгое время такого способа не было. Небольшие количества азота люди научились связывать (скажем, молнию можно смоделировать и в лаборатории – мощный электрический разряд!), но всё это не годилось для большого производства. Поэтому человечество использовало уже готовые месторождения соединений азота. И прежде всего это были залежи селитры в Чили, в пустыне Атакама. Корабли под разными флагами развозили селитру из Чили по всему миру. И специалисты уже в конце XIX века начинали волноваться: что будет, когда месторождения истощатся? Где брать минеральные удобрения? А если нигде, то как прокормить растущее население Земли?



Круговорот азота, Wikimedia Commons, с изменениями

Поэтому задача промышленной фиксации азота была, наверное, самой важной для химиков на рубеже XIX и XX веков. И именно ей занялся Габер с сотрудниками в первом десятилетии XX века.

Вот формальное уравнение химической реакции, которую изучал Габер:

$$N_2 + 3H_2 \rightarrow 2NH_3$$

Если выразить то же самое словами – берём одну часть азота (выделенного из воздуха), три части водорода (к этому времени уже были известны эффективные способы получения водорода, прежде всего из воды), на выходе имеем две части аммиака.

Само по себе это химическое уравнение очень простое. Но нужно было подобрать условия, при которых процесс будет идти в нужном направлении и с нужной скоростью. Разработать схему промышленной установки, найти оптимальные температуру, давление, скорость потока газов, а главное – *катализáтор*.

Катализатором называют вещество, которое само не расходуется во время химического процесса, но существенно его ускоряет. Как можно достичь ускорения для реакции, приведённой выше? Нужно взять какой-то твёрдый катализатор, который будет на своей поверхности собирать (как говорят химики, адсорбировать) молекулы азота N_2 и водорода H_2 и «растаскивать» их на отдельные атомы. А из отдельных атомов N и H уже может легко «собраться» молекула аммиака NH_3.

Сперва Габер сумел придумать такой катализатор на основе металла осмия. Правда, осмий очень редок и дорог, но ведь, с другой стороны, катализатор не расходуется во время реакции, так что на первое время этот вариант годился. Потом стало ясно, что можно использовать и другие материалы, и постепенно другим исследователям удалось найти более дешёвые и доступные варианты. Так, в достаточно скором времени Алвин Митташ разработал катализатор на основе железа, который используется и поныне.

В 1909 году был достигнут первый явный успех: Габер смог продемонстрировать лабораторную установку, которая производила 250 миллилитров сжиженного аммиака за два часа. Конечно, совсем мало, но большая дорога начинается с одного шага. Эта установка демонстрировала возможность синтезировать аммиак именно так – а значит, открывала перспективы для создания промышленного производ-

Алвин Митташ (1869–1953), открывший катализатор синтеза аммиака на основе железа

Упрощённая схема происходящего на катализаторе

Карл Бош (1874 – 1940)

Вильгельм Оствальд (1853 – 1932)

ства. И эти перспективы увидел Карл Бош, сотрудник химического концерна BASF.

Преобразование лабораторного процесса в промышленный, которое осуществил Бош, было отдельной нелёгкой задачей. Нужно было создать установки, способные работать при высоком давлении (сотни атмосфер!) и высокой температуре, нужно было усовершенствовать катализатор. Тем не менее Бош сказал: «Думаю, что это сработает. Рискнём». И уже в 1913 году в немецком городе Оппау был запущен завод, производящий аммиак. Соответствующий технологический процесс и поныне носит имена сразу двух человек: Габера, который придумал подходящую технологию, и Боша, который смог реализовать её на промышленной основе.

Правда, сам по себе аммиак используется ограниченно. Но из него уже можно получать другие соединения азота. Как раз примерно в то же самое время, незадолго до изобретения процесса Габера–Боша, великий немецкий химик Вильгельм Оствальд усовершенствовал способ, который позволяет получать из аммиака азотную кислоту. А азотная кислота – это уже основа химической промышленности. Как в части удобрений, так и – мы уже об этом упоминали – в части производства взрывчатых веществ.

Зависимость от чилийской селитры стала снижаться и в первой половине XX века постепенно сошла на нет. И сейчас те места в пустыне Атакама, где когда-то вокруг мест добычи селитры вырастали целые посёлки, в основном заброшены. Только остатки старых построек напоминают о том, что когда-то в этой местности кипела жизнь и именно отсюда получал минеральные удобрения весь мир.

Заброшенное здание в Атакаме

Заброшенный город

Окончание в следующем номере

ДЖОН ДАЛЬТОН
И ПАРЦИАЛЬНОЕ ДАВЛЕНИЕ

Леонид Свистов

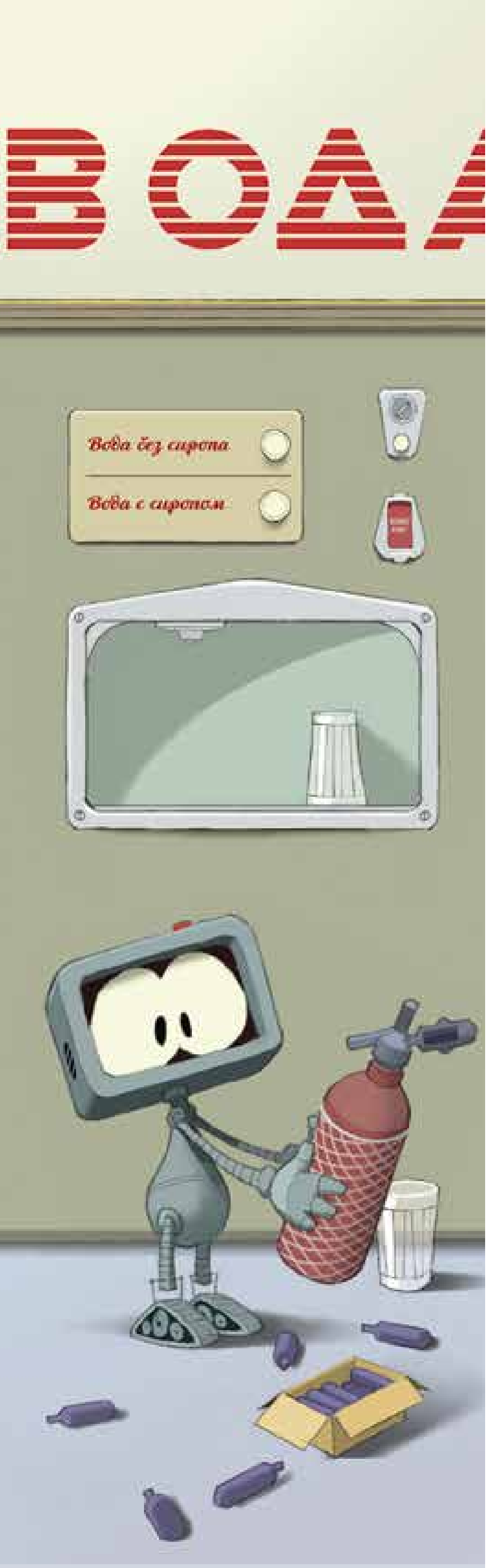
Джон Дальтон был необычайно разносторонним учёным. На протяжении своей жизни (1766 – 1844 гг.) он занимался наукой о погоде (метеорологией), лингвистикой (английской грамматикой), исследовал природу цветового зрения, но главные его работы посвящены атомарному и молекулярному устройству окружающих нас твёрдых, жидких и газообразных тел. Исследуя различные реакции, он показал, что окружающие нас химические вещества состоят из молекул, построенных из элементарных кирпичиков-атомов.[1]

Так, газообразное вещество состоит из очень большого числа молекул, которые находятся в непрерывном тепловом движении. Ударяясь о стенки сосуда, они создают давление, которое можно измерить.

Во времена Дальтона более понятным казалось другое объяснение давления газа на стенки. Полагали, что частицы газа отталкиваются друг от друга. Благодаря этому газ заполняет весь объём сосуда и давит на стенки. Один из первых экспериментов, приоткрывающих механизм давления газа, принадлежит Дальтону.

Дальтон задался следующим вопросом: как будет давить на стенки сосуда газ, состоящий из разных молекул? Можно сделать такой эксперимент. Возьмём две одинаковые банки: одну с газообразным азотом под давлением P_1, а другую, например, с газообразным кислородом под давлением P_2. Что будет с давлением в банке, содержащей смесь газов, если мы весь кислород из второй банки передавим в банку с азотом? Эксперименты Дальтона показали, что давление будет равняться сумме давлений $P_1 + P_2$, несмотря на то, что газы перемешались! Объяснить такой результат отталкиванием частиц газа не так просто: нам бы пришлось предположить, что взаимодействуют между собой только одинаковые частицы газа. Гораздо проще объяснить результат эксперимента Дальтона тем, что молекулы в газах находятся далеко друг от друга и взаимодействие между молекулами не мешает им

[1] См. статью М. Молчановой «Джон Дальтон: сделано из атомов» в «Квантике» № 7 за 2021 год.



ударяться о стенку и создавать давление на неё. Давление, которое создают молекулы вещества одного сорта, называют *парциальным давлением*. Закон Дальтона, открытый экспериментально, утверждает, что давление смеси нескольких газов равно сумме парциальных давлений всех газов, находящихся в объёме. Парциальные давления оказались очень важными величинами. Так, если мы решили изготовить газировку, то нам нужно поднять парциальное давление углекислого газа, а не общее давление воздуха и углекислого газа в объёме над водой. Количество растворенного в жидкости газа пропорционально парциальному давлению над поверхностью жидкости. Это ещё один замечательный закон Дальтона. Смысл его понятен: чем чаще молекулы углекислого газа ударяются о поверхность воды, тем вероятнее молекулы войдут внутрь жидкости и начнут своё блуждание в ней (диффузионное движение в растворе). И опять же другие газы, находящиеся над жидкостью или растворённые внутри неё, такие как кислород или азот, не мешают углекислому газу раствориться в воде!

А что будет с молекулами газа, ударяющимися в стенку из твёрдого тела? Практически все молекулы будут отражаться от стенки, но очень маленькая часть молекул газа войдёт в стенку и будет блуждать внутри твёрдой стенки (диффундировать), пока не выйдет из твёрдой стенки либо с одной, либо с другой стороны. Поэтому все стенки всё-таки пропускают газ, хотя делают это очень и очень медленно. Скорость блуждания или диффузии зависит от сорта молекулы. Что будет происходить в этом случае? Прохождение молекул через твёрдую стенку будет определяться парциальными давлениями с обеих сторон стенки? Или в этом случае наконец-то будет важно общее давление всех газов?

Опыты с прохождением газов через твёрдое тело были проведены почти через 100 лет после опытов Дальтона известным учёным, нобелевским лауреатом Уильямом Рамзаем. Оказалось, что и в случае стенок из твёрдого материала поток диффундирующих молекул одного сорта определяется парциальными давлениями этого газа с обеих сторон стенки. Схему опыта

Рамзая можно найти на сайте Википедии в статье «Парциальное давление», а мы попробуем описать качественный опыт, демонстрирующий важность именно парциального давления.

Нам потребуется стеклянная банка с краником и крышкой, резиновая перчатка и шарик с газообразным гелием. Первое, что нужно сделать, это заполнить банку гелием, предварительно натянув на горлышко перчатку. Прежде чем через краник заполнить банку гелием, нам пришлось откачать из неё часть воздуха – просто ртом. Чтобы при откачке воздуха перчатка не лопнула, нам потребовалась завинчивающаяся крышка (догадайтесь, для чего!). И вот что у нас получилось (фото 1). В банке находится преимущественно газообразный гелий, а снаружи воздух. Суммарное давление смеси гелия и воздуха в банке чуть больше атмосферного. Теперь запасёмся терпением и будем ждать! Фото 2, 3, 4 мы делали один раз в день, а фото 5 сделали на 8-й день.

Чтобы объяснить эволюцию перчатки, нужно знать, что гелий очень редкий газ и в атмосфере его почти нет, то есть парциальное давление гелия снаружи банки всегда равно нулю. Надеюсь, вооружившись знанием о парциальном давлении, вы легко объяснили наше наблюдение. Какой газ быстрее проходит через резину перчатки – гелий или воздух? Если банку с перчаткой, заполненную гелием, поставить на весы, то как будут меняться их показания со временем?

Фото 1

Фото 2

Фото 3

Фото 4

Фото 5

Фото автора
Художник Алексей Вайнер

XXXIV МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ

В очередном Математическом празднике для 6 и 7 классов 19 февраля 2023 года приняли участие более 20 000 школьников. Приводим избранные задачи (в скобках после номера задачи указан класс). Подробности – на сайте mccme.ru/matprazdnik/

1 (6). На доске написаны две суммы:

$$1+22+333+4444+55555+666666+7777777+\\+88888888+999999999,$$

$$9+98+987+9876+98765+987654+9876543+\\+98765432+987654321.$$

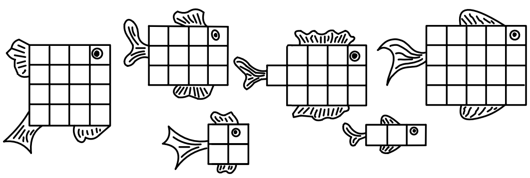
Определите, какая из них больше (или они равны).

Г. Гальперин

2 (7). Аня называет дату красивой, если все 6 цифр её записи различны. Например, 19.04.23 – красивая дата, а 19.02.23 и 01.06.23 – нет. А сколько всего красивых дат в 2023 году?

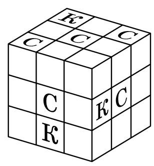
М. Евдокимов

3 (6). Кот за полминуты съел половинку самой маленькой рыбки, а всего он съел 5 рыбок и потратил на это целое число минут (кот ест рыбу с постоянной в «клеточках» скоростью). На рисунке изображены все рыбки, которые были у кота. Какую рыбку кот не стал есть?



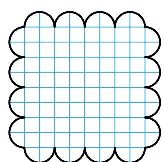
Т. Казицына

4 (7). Ваня сложил куб $3\times3\times3$ из красных и синих брусков размером $1\times1\times3$. Затем он начал рисовать то, что у него получилось. Когда пришла Таня, Ваня успел раскрасить лишь 8 из 27 клеток на видимой поверхности нарисованного куба (см. рисунок). Посмотрев на рисунок, Таня сказала, что не знает цвет лишь одной из ещё не раскрашенных клеток. Ваня ответил, что эта клетка – красная. Завершите Ванин рисунок (отметьте буквой «С» синие клетки, буквой «К» красные, знаком «?» клетку, цвет которой Таня не могла восстановить).



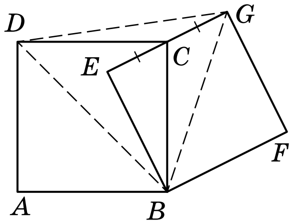
М. Евдокимов, Т. Казицына

5 (6). Разрежьте «печенье» на 16 равных частей (то есть одинаковых по размеру и по форме). Разрезы не обязательно прямолинейные.



Т. Голенищева-Кутузова

6 (7). Два квадрата расположены как на рисунке, отмеченные отрезки равны. Докажите, что треугольник BDG равнобедренный.



Жюри

7 (7). У царя есть 7 мешков с золотыми монетами, в каждом по 100 монет. Царь помнит, что в одном мешке все монеты весят 7 г, во втором 8 г, в третьем 9 г, в четвертом 10 г, в пятом 11 г, в шестом 12 г, в седьмом 13 г, но не помнит, где какие.

Царь сообщил это придворному мудрецу и указал на один из мешков. Мудрец может вынимать из этого и из других мешков любое количество монет, но на вид они все одинаковы. Однако у мудреца есть большие двухчашечные весы без гирь (они точно покажут, равны ли веса на чашках, а если нет, то какая чашка тяжелее). Может ли мудрец определить, какие монеты в указанном мешке, сделав не более двух взвешиваний?

М. Евдокимов

8 (6). Кащей заточил в темницу толпу пленников и сказал им: «Завтра вам предстоит испытание. Я выберу нескольких из вас (кого захочу, но минимум троих), посажу за круглый стол в каком-то порядке (в каком пожелаю) и каждому на лоб наклею бумажку с нарисованной на ней фигуркой. Фигурки могут повторяться, но никакие две разные фигурки не будут наклеены на одинаковое число людей. Каждый посмотрит на фигурки остальных, а своей не увидит. Подавать друг другу какие-то знаки запрещено. После этого я наклейки сниму и велю всех развести по отдельным камерам. Там каждый должен будет на листе бумаги нарисовать фигурку. Если хоть один нарисует такую, какая была у него на лбу, всех отпущу. Иначе останетесь здесь навечно». Как пленникам договориться действовать, чтобы спастись?

Т. Голенищева-Кутузова, Т. Казицына

Художник Сергей Чуб

НАШ КОНКУРС, VI ТУР
(«Квантик» № 2, 2023)

26. *На остановке останавливаются автобусы 3, 4 и 5, причём автобус № 3 ходит каждые 3 минуты, автобус № 4 – каждые 4 минуты, а автобус № 5 – каждые 5 минут. Аня заметила, что на остановку приходило по одному автобусу в* 10:00, 10:01, 10:02, 10:03 *и* 10:05. *Какой был номер у автобуса, приехавшего в* 10:05, *и почему?*

Ответ: № 4. Автобусы, пришедшие в 10:00, 10:01 и 10:02, имеют разные номера, поскольку между их прибытием проходило меньше 3 минут. То же самое можно сказать и про автобусы, приходившие в 10:01, 10:02 и 10:03. Значит, в 10:00 и 10:03 прибыли автобусы с одним и тем же номером – следовательно, это был № 3 (и больше Аня таких автобусов не видела). Тогда, с одной стороны, автобус в 10:05 имеет номер 4 или 5, а с другой – его номер совпадает либо с номером автобуса в 10:02, либо с номером автобуса в 10:01. Следовательно, в 10:05 приехал автобус № 4.

27. *Ребятам задали на дом вырезать из картона 5 тетраминошек, как на рисунке 1. Перед уроком Петя и Вася поняли, что неправильно записали задание и вырезали по пять пентаминошек. Фигурки Пети изображены на рисунке 2, а Васины – на рисунке 3. Сможет ли Петя отрезать по одной клетке от каждой своей фигурки так, чтобы в результате получился нужный набор? А сможет ли Вася? (Нарисуйте, какие клетки нужно отрезать, или объясните, почему получить нужный набор не удастся.)*

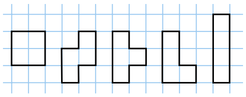


Рис. 1

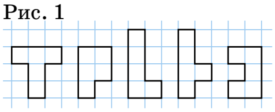


Рис. 2

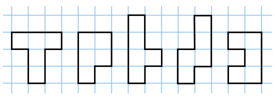
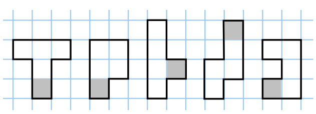


Рис. 3

Ответ: Вася сможет, а Петя – нет. Первые две тетраминошки Петя может вырезать только из одной своей фигурки (второй слева) и поэтому вырезать обе эти тетраминошки одновременно он не сможет. А у Васи всё получится: на рисунке закрашены клетки, которые ему нужно будет отрезать.



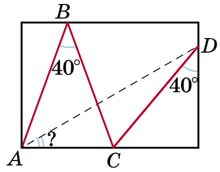
28. *Федя увидел в спортивном магазине гантели. Каждая гантель представляла собой два одинаковых стальных диска, насаженных на стержень. У разных гантелей диски были разного диаметра, но толщина всех дисков была одна и та же, и все стержни были одинаковыми. Увидев, что гантели с дисками диаметра* 5 см *весят* 5 кг, *а гантели с дисками диаметра* 7 см *весят* 7 кг, *Федя удивился: это не сходилось с известной ему формулой* πR^2 *для площади круга радиуса* R. *Разберитесь, что не учёл Федя, и найдите диаметр дисков у гантелей весом* 13 кг.

Ответ: Федя не учёл, что в вес каждой гантели, не важно какого радиуса, входит ещё один и тот же вес стержня; диаметр дисков у гантелей весом 13 кг равен 11 см. Диски гантелей диаметров 5 см и 7 см отличаются на «кольцо» шириной 2 см, а по весу такие гантели различаются на 2 кг. Значит, изменение веса гантелей на 2 кг соответствует изменению площади одного диска на площадь такого кольца, то есть на $\pi \cdot (7^2 - 5^2) = 24\pi$. Гантели весом 13 кг тяжелее семикилограммовых гантелей на 6 кг, значит, площадь диска такой гантели будет на $3 \cdot 24\pi = 72\pi$ больше. То есть площадь диска равна $\pi \cdot (7^2 + 72) = \pi \cdot 121 = \pi \cdot 11^2$, следовательно, радиус диска такой гантели равен 11 см.

29. *По шахматной доске* 8×8 *прошла хромая ладья (каждым ходом она переходила в клетку, соседнюю по стороне; возможно, в некоторые клетки она зашла несколько раз, а в некоторые не зашла совсем). Количество вертикальных ходов было вдвое больше, чем количество горизонтальных. Ладья начала движение в левом нижнем углу, а закончила в каком-то другом. В каком именно?*

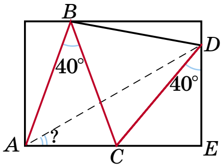
Ответ: в правом нижнем. Поскольку вертикальных ходов было вдвое больше горизонтальных, суммарное количество ходов вверх и вниз чётно. Но если хромая ладья оказалась в одном из верхних углов, то количество B ходов вверх было на 7 больше количества H ходов вниз. Но тогда их сумма $B + H = 2H + 7$ нечётна – противоречие. В правый нижний угол ладья попасть могла, например, сделав 7 ходов вправо и 7 пар ходов вверх-вниз.

30. *Вершины ломаной* $ABCD$ *лежат на сторонах прямоугольника (см. рисунок). Все звенья ломаной равны, а два отмеченных на*



рисунке угла равны 40°. *Чему равен угол* CAD?

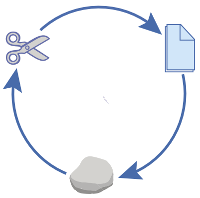
Ответ: 30°. Обозначим правую нижнюю вершину прямоугольника буквой E и проведём отрезок BD. Углы BAC и BCA при основании равнобедренного треугольника ABC равны $(180^\circ-40^\circ):2=$ $=70^\circ$, а угол DCE в прямоугольном треугольнике CDE равен $90^\circ-40^\circ=50^\circ$. Значит, $\angle BCD=$ $=180^\circ-\angle ACB-\angle DCE=180^\circ-70^\circ-50^\circ=60^\circ$. Но треугольник BCD равнобедренный, а значит, и равносторонний. Тогда $BD=BC=BA$, и треугольник ABD – равнобедренный, причём $\angle ABD=\angle ABC+\angle CBD=40^\circ+60^\circ=100^\circ$. Значит, $\angle BAD=(180^\circ-100^\circ):2=40^\circ$, и, наконец, $\angle CAD=\angle CAB-\angle BAD=70^\circ-40^\circ=30^\circ$.



КАМЕНЬ, НОЖНИЦЫ, БУМАГА

(«Квантик» № 3, 2023)

Заметим, что камень, ножницы и бумага бьют друг друга «по кругу», как показано на рисунке (стрелочки, идущие по часовой стрелке, показывают, кто кого бьёт).



Пусть есть три человека A, B, C, которым мы выдаём эти предметы. Тогда люди A, B, C тоже будут бить друг друга по кругу по часовой стрелке. Но расставить людей по кругу можно лишь двумя способами: скажем, если мы ставим подряд по часовой стрелке A и B (и на оставшееся место – C), то у нас A бьёт B, B бьёт C, C бьёт A; если же ставим подряд по часовой стрелке B и A, то у нас B бьёт A, A бьёт C, C бьёт B.

А теперь поймём: что происходит, когда два человека меняются предметами? Если сначала, скажем, A бил B и они поменялись, то теперь B бьёт A. Значит, расстановка по кругу этих людей поменялась. Но фокусник знает, какая была расстановка изначально, а значит, знает и то, какова она теперь – ведь расстановок людей всего две! А этого достаточно: фокуснику не обязательно знать, кто именно поменялся и какие у кого на руках предметы – важно лишь, кто кого бьёт.

Поэтому фокусник может сделать верное предсказание, если знает, у кого что было изначально. Например, при чётном количестве обменов человек, у которого изначально был камень, будет бить того, у кого до обменов были ножницы, а при нечётном – того, у кого была бумага.

УЗНИКИ И ДВЕ МОНЕТКИ

(«Квантик» № 3, 2023)

Пусть один из узников называет то, что у него выпало, а другой – противоположное тому, что у него выпало. Тогда если у узников выпало одно и то же, угадает первый, а если выпало разное – угадает второй.

ДАВАЙТЕ ЧТО-НИБУДЬ ПРИБАВИМ

4. Годятся, например, числа, первое из которых равно $3/2+201!!/2$. Напомним, что через $n!!$ обозначается произведение всех нечётных чисел от 1 до n, если n нечётно, и произведение всех чётных чисел от 2 до n, если n чётно, то есть число $n(n-2)(n-4)\ldots$ и так далее, до двойки или единицы.

6. Годится, например, число 2054 и следующие за ним 4 числа.

7. Годится, например, 31-значное число $B0000120$ и 9 следующих за ним чисел, где $B=322\,755\,373\,782\,527\,553\,737\,793$. (Требуется, чтобы B делилось на 121, 61, 41, 31, 63, 127 и 43.)

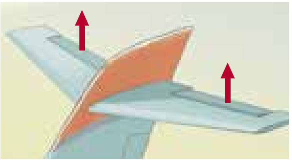
ЛЕГКО ЛИ СТАТЬ ДЕРЕВОМ

На спиле хорошо видны слои причудливо изогнутых проводящих тканей в стволе. Видно, что никаких годичных слоёв – вторичных тканей – в нём нет. На периферии ствола то тут, то там мы видим срезы старых черешков листьев, надолго остающихся на поверхности.

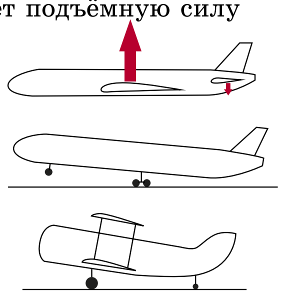
Но что это за тёмная масса волокон вокруг ствола и остатков листьев? Это воздушные корни, которые образуются на верху ствола, спускаются, тесно прижимаясь к нему, до земли и углубляются в почву. Корни, оплетая ствол, не только наращивают его толщину, но и подают воду к листьям, даже когда старые сосуды в самом стволе придут в негодность. Так что в каком-то смысле ствол диксонии всё-таки умеет нарастать в толщину. Только камбий тут совсем «не при делах».

САМОЛЁТНЫЕ ТОНКОСТИ

1. Пилоты поднимают горизонтальное оперение на хвосте. Из-за этого поток воздуха начинает сверху давить на хвост и самолёт откидывается на шасси

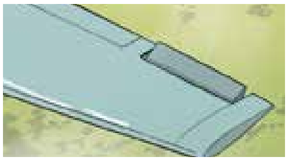


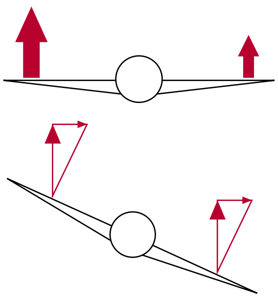
назад. Это резко увеличивает подъёмную силу крыльев и самолёт отрывается от земли. Мелкие «кукурузники», кстати, так не могут сделать, потому что уже упираются колесом на хвосте в землю, но они на земле всегда в положении сильно задранного носа. Большим лайнерам, в свою очередь, это решение бы не подошло: хочется, чтобы их салон был горизонтальным и в полёте, и стоя на земле.



2. Чтобы самолёт набрал высоту, ему нужно задрать нос. Так как крылья прилагают силу к центру самолёта, то, управляя только оперением на крыльях, пилоты не могут повернуть самолёт, задрав его нос или хвост. Нужно толкать за «край» самолёта, далеко от центра тяжести. Как и при взлёте, оперируя оперением на хвосте, пилоты создают давление на хвост, направленное вниз.

3. Оперение на концах крыльев (элероны) используется для заваливаний на бок и, как следствие, для изменения направления движения. Управляя элеронами, пилоты могут немного менять подъёмную силу крыла. Если одно крыло толкает самолёт вверх больше другого, он завалится на бок. Это заваливает и подъёмную силу, так что она теперь толкает самолёт не только вверх, но и вбок, позволяя ему поворачивать.





4. Зачем самолёт заваливается на бок, мы ответили в предыдущей задаче. Разберёмся, почему пассажиры не сваливаются вниз.

Какие силы действуют на самолёт и на пассажиров? Кажется, что пассажиры должны сваливаться из-за силы тяжести, но сила тяжести действует на самолёт и на пассажиров одинаково – так что если бы это была единственная действующая сила, то пассажиры бы ощущали невесомость и парили бы в салоне. Более-менее так и создают условия невесомости для разных опытов: самолёт летит с нулевой подъёмной силой и с тягой, компенсирующей сопротивление воздуха.

При нормальном полёте у самолёта ещё работают двигатели и действуют силы со стороны воздуха (сопротивление, подъёмная сила). Но ни одна из этих сил не стремится сместить пассажира влево или вправо по салону, а только вдавливают в кресло (двигатели в спинку кресла, подъёмная сила крыльев – в сиденье вниз).

XXXIV МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК.

Избранные задачи

1. Ответ: суммы равны. В обеих суммах в разряде единиц складываются цифры от 1 до 9, в разряде десятков – цифры от 2 до 9, в разряде сотен – цифры от 3 до 9 и так далее.

2. Ответ: 30. Цифры 2 и 3 уже участвуют в номере года, поэтому из всех месяцев нужно рассмотреть только 01 и 04 – 10. В каждом из этих номеров есть 0, поэтому в красивой дате не будет дня с номером, начинающимся с 0, 2 и 3, а также не будет дней 10 – 13 – остаются только 6 дней, 14 – 19.

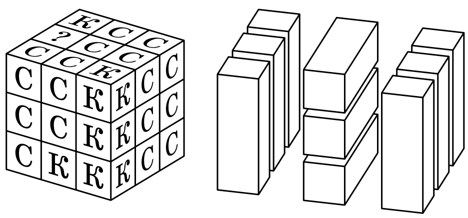
Значит, красивые даты есть в 6 месяцах, 04 – 09. И в каждом из этих 6 месяцев будет по 5 красивых дат: подходят все дни 14 – 19, кроме одного (с той же цифрой на конце, что у месяца).

3. Ответ: самую правую.

Раз за полминуты кот съел полрыбки, то за минуту он съест эту рыбку целиком. То есть за минуту кот съедает 3 клетки, а за целое число минут – кратное 3 число клеток.

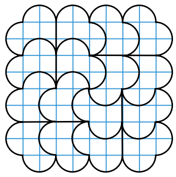
Суммарно во всех рыбках 68 клеток. Это число при делении на 3 даёт остаток 2. Значит, и в оставшейся рыбке количество клеток при делении на 3 даёт остаток 2. Такая рыбка всего одна – самая правая (с туловищем 4×5 клеток).

4. Ответ: см. левый рисунок.



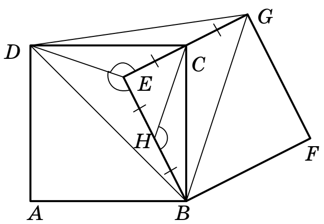
Сперва определим, как расположены бруски в кубе. Брусок, который проходит через синюю клетку на передней грани, снизу и справа ограничен красными кубиками $1 \times 1 \times 1$, поэтому проходит через центр куба $3 \times 3 \times 3$. Назовём этот брусок центральным. Красная и синяя клетки на правой грани принадлежат двум разным брускам, и оба эти бруска вертикальны (идти слева направо они не могут из-за центрального бруска). Значит, оставшиеся клетки на правой грани входят в ещё один вертикальный брусок. Теперь понятно, что куб состоит из трёх слоёв, как показано на правом рисунке. В каждом бруске, кроме среднего в левом слое, есть клетка известного цвета. Остаётся неизвестным цвет одного бруска, а значит, и его верхней клетки.

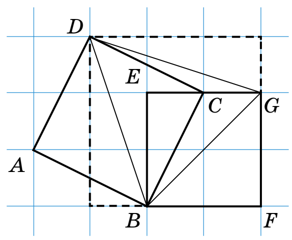
5. Ответ: см. рисунок.



6. Решение 1. Рассмотрим треугольники DEG и DEB. У них общая сторона DE, равные стороны EG и EB (как две стороны квадрата). Осталось доказать, что углы DEG и DEB равны, – тогда указанные треугольники будут равны (по двум сторонам и углу между ними), а значит, будут равны и соответственные стороны DG и DB.

Равенство этих углов можно доказать так. Отметим H – середину отрезка EB. Заметим, что $HB = EC$ как половины стороны правого квадрата, а также $BC = DC$, $\angle HBC = 90° - \angle ECB = \angle ECD$. Значит, треугольники HBC и ECD равны по двум сторонам и углу между ними. Так как треугольник EHC равнобедренный прямоугольный, $\angle EHC = 45°$, а $\angle DEG = \angle CHB = 180° - \angle EHC = 135°$. Но тогда и $\angle DEB = 360° - \angle DEG - \angle GEB = 360° - 135° - 90° = 135°$.





Решение 2. Перенесём чертёж на клетчатую бумагу. Начнём с квадрата $BEGF$: пусть это клетчатый квадрат 2×2. По отрезку BC построим квадрат $ABCD$. Теперь видно, что отрезки DG и DB равны как гипотенузы прямоугольных треугольников с катетами длиной 1 клетка и 3 клетки.

7. Ответ: да, может.

Заметим, что если взять из каждого мешка по монете, то их суммарный вес будет равен $7+8+\ldots+13=70$ грамм. Назовём такой набор монет *комплектом*.

Пусть в указанном царём мешке монеты весят x грамм каждая. Если взять 70 таких монет, то их вес равен $70x$ – такой же, как у x комплектов. То есть если мудрец узнает, сколько комплектов нужно, чтобы уравновесить эти 70 монет, он ответит на вопрос царя.

Пускай первым взвешиванием мудрец сравнит вес этих 70 монет и 10 комплектов. Если весы в равновесии, то $x=10$ и задача решена, если монеты перевесили, то $x>10$, если перевесили комплекты, то $x<10$.

Если мудрец знает, что $x>10$, то за одно взвешивание он легко выяснит, весят монеты 11, 12 или 13 г каждая. Действительно, теперь можно сравнить вес 70 монет и 12 комплектов. Если монеты перевесили, то $x=13$, если весы в равновесии, то $x=12$, если комплекты перевесили, то $x=11$.

Аналогичным образом мудрец может поступить в случае $x<10$: монеты тогда могут весить по 7, 8 или 9 г, так что осталось сравнить вес 70 монет и 8 комплектов.

Отметим, что при каждом взвешивании мудрец использует не более чем $70+12$ монет из мешка, на который указал царь, и не более чем по 12 монет из остальных мешков. Так что монет в мешках ему хватит.

8. Поскольку разных фигурок разное количество, какая-то фигурка использована больше остальных. Назовём её *главной*. Пусть каждый пленник рисует ту фигурку, каких он видит больше всего. Если все это смогут сделать, то все с главными фигурками на лбу дадут правильный ответ.

Остаётся решить, что делать пленнику, который не может определить, какая фигурка главная. Такая ситуация возникает, если главных фигурок (например, квадратов) ровно на 1 больше, чем следующих по количеству (например, кругов). Тогда пленники с квадратами на лбу будут видеть одинаковое количество кругов и квадратов.

Договоримся из двух кандидатов в главные фигурки называть ближайшую по часовой стрелке. Может ли так случиться, что каждый из квадратов назовёт при этом круг? Нет, так как квадратов больше! Значит, хотя бы один из квадратов угадает и всех спасёт.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VIII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 мая в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VIII ТУР

36. У профессора есть несколько будильников. Вечером он заводит все будильники с интервалами в 5 минут: на 7:00, 7:05, 7:10 и так далее. Когда будильник звонит, профессор мгновенно нажимает кнопку «отложить», а будильник переносит звонок на 9 минут вперёд. Профессор окончательно просыпается, когда одновременно звонят сразу 4 будильника. Успеет ли он проснуться ранее 9:30 утра, чтобы успеть на свою зум-лекцию?

37. Из деревянного бруса в форме параллелепипеда 1 дм × 1 дм × 50 дм несколькими поперечными распилами получили бруски, из которых склеили каркас куба. Какова высота этого каркаса, если его рёбра в поперечном сечении имеют размер 1 дм × 1 дм?

наш КОНКУРС

Авторы: Леонид Петров (36), Сергей Токарев (37), Михаил Евдокимов (38),
Дмитрий Калинин, Сергей Костин (39), Егор Бакаев (40)

38. Фокусник хочет заготовить 10 карточек, написать на каждой натуральное число, не большее 90, чтобы все числа были различны, и показывать такой фокус: зритель наугад выбирает две карточки, называет фокуснику сумму чисел на них, а фокусник тут же отгадывает, какие две карточки у зрителя. Помогите фокуснику найти числа и объясните, почему фокус будет получаться.

39. Квадрат 7×7 разрезали по границам клеток на 7 прямоугольников одинакового периметра. Обязательно ли все эти прямоугольники одинаковые?

40. Один из углов прямоугольника поделён двумя лучами на три равных угла. Один из этих лучей делит сторону прямоугольника пополам. Второй луч пересекает другую сторону. В каком отношении он её делит?

Художник Николай Крутиков

Шар, куб и электромагнит

Потолок в очень высокой комнате - электромагнит. Железный куб и железный шар одинаковой массы висят, притянутые к нему: куб соприкасается с потолком целиком по грани, а шар - в одной точке касания. Электромагнит выключают, и оба предмета (куб и шар) начинают падать вертикально вниз (с одинаковым ускорением, без вращения). Какой из этих предметов упадёт быстрее, то есть коснётся пола раньше?

Автор Григорий Гальперин
Художник Yustas

ISSN 2227-7986 23004
9 772227 798237