№ 11 | ноябрь 2021

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

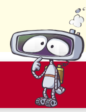
№ 11
ноябрь
2021

ГРОМ И МОЛНИЯ

ФОТОГРАФИЯ РАДУГИ

СИГНАЛЬНЫЕ ОГНИ

Enter



«Квантик» тоже будет на выставке! Приходите!

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
t.me/kvantik12
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 11, ноябрь 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор
и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- бумажный каталог – Объединённый каталог «Пресса России» (индекс **11346**)
- электронная версия Каталога Почты России (индексы **ПМ068** и **ПМ989**)

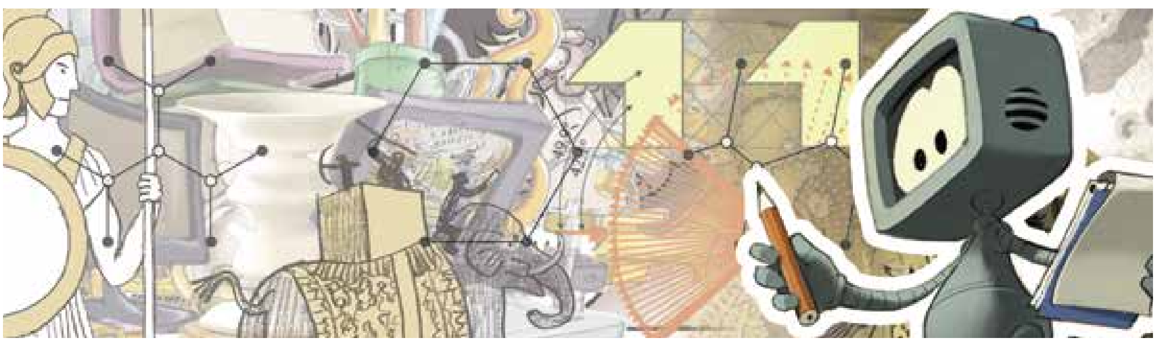
Онлайн-подписка на сайтах:
- агентства АРЗИ **akc.ru/itm/kvantik**
- Почты России **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 20.10.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+ EAC

СОДЕРЖАНИЕ



ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Иван Высоцкий

ПРИКЛЮЧЕНИЯ СТАСА

Fish or chicken?

4 января. Утро.

Стасу казалось, что он сидит на санках, которые с разгону въезжают в гору, вот-вот остановятся, покатятся назад, зацепятся, перевернутся, и он больно стукнется затылком. Но аэробус ни за что не цеплялся, а уверенно взбирался в небо. Однажды давным-давно Стас уже летал на самолёте. Он не помнил, когда, куда и откуда. Он помнил только непрерывную боль в ушах и собственный плач. В этот раз, решив мужественно терпеть, он был приятно удивлён тем, что уши не болят. Их разок заложило, и всё. Стас сглотнул, и заложенность пропала. Внезапно в салон ворвалось ярчайшее солнце. Хмурый московский январь остался внизу и позади.

Некоторое время Стас изучал спинку кресла перед собой. Сверху – экран с информацией о полёте. Внизу – карман со страшно неудобными наушниками, комиксами про то, как себя вести в самолёте A330, и рекламным журналом, в котором много разного. Стаса привлекла страница «Наш авиапарк» с самолётами авиакомпании и разными сведениями о них.

Погас сигнал «Пристегните ремни», и динамик на двух языках прошепелявил, что можно пользоваться мобильниками, ноутбуками, а скоро предложат завтрак и напитки. Стас немедленно вытащил телефон, вызвал калькулятор и начал развлекаться переводом футов в метры, миль в километры и градусов Фаренгейта в градусы Цельсия – информационный экран давал массу пищи для размышлений.

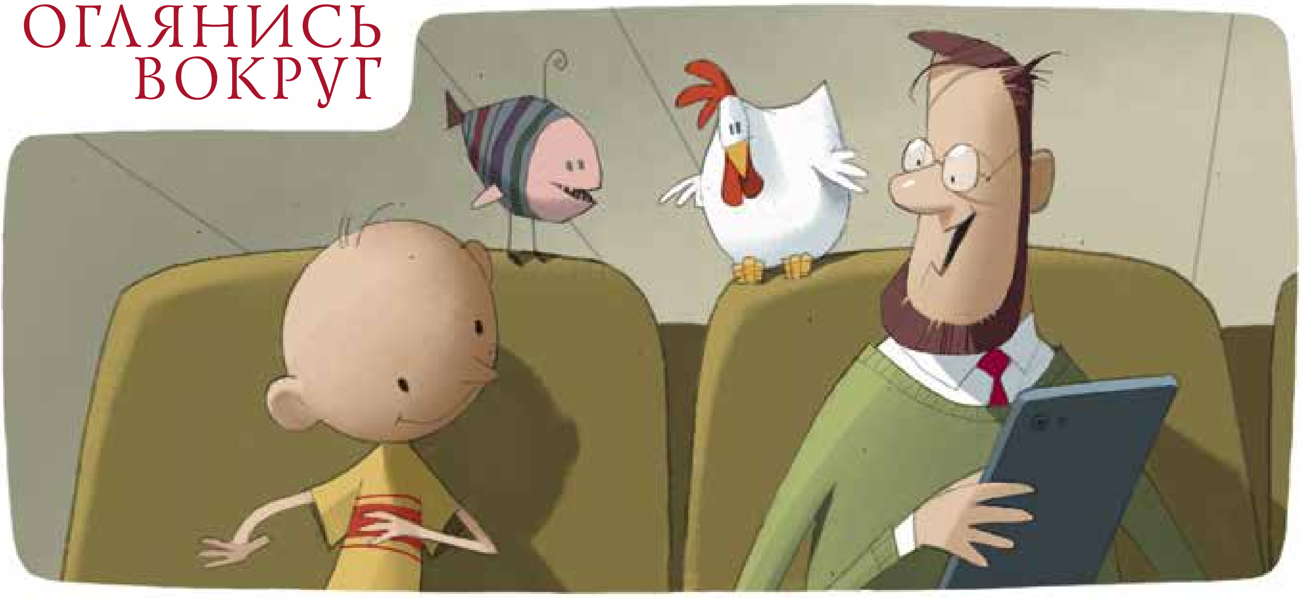
От этого занятия Стаса отвлекла миловидная бортпроводница: «Fish or chicken?». На выбор предлагалась курица с рисом или рыба с картошкой. Стас, естественно, захотел курицу с картошкой. Созрело простое решение – папа возьмёт рис и курицу, а Стас рыбу и картошку, а потом нужно поменять курицу и рыбу местами. Но планам не было суждено сбыться: через две минуты стюардесса снова подошла к ним и со скорбным выражением лица поведала, что выбора больше нет – осталась только рыба. Путешественники почти не расстроились и милостиво разрешили опечаленной девушке тащить, что найдётся.

Дожёвывая рыбу (без костей и почти без всего остального), Стас понял, почему не хватило курицы – они сидели в самом хвосте салона, и им досталось то, что осталось после алчных любителей курицы, сидящих впереди. Одни куролюбы собрались, с досадой подумал Стас и поделился своей догадкой с папой. Папа кивнул и сказал, что, наверно, так и есть.

Некоторое время Стас сидел тихо и даже, казалось, спал. Но если бы в этот момент мама Лена увидела сына, она сразу поняла бы, что спокойный полёт у Лёши кончился. Внезапно Стас возбудился, выхватил журнал авиакомпании и минуту его изучал. Потом привстал и начал внимательно разглядывать салон. Ещё секунду помолчал, а потом спросил:

– Пап, а что делать, если в семье не четыре ребёнка, а триста детей?

– Что?.. Сколько? – выдавил из себя папа Лёша внезапно осипшим голосом, поперхнулся кофе, остатки которого пролил на брюки.



– В нашем самолёте 302 места, – вот, в журнале написано, – Стас ткнул пальцем в «Наш авиапарк». – Свободных мест нет, я смотрел. Давай считать, что пассажиров триста. Кто-то захочет рыбу, а кто-то – курицу. Получается, как в задаче про детей[1]. Только вместо четырёх детей триста пассажиров, вместо мальчиков – те, кто хочет курицу, а вместо девочек – те, кто хочет рыбу. Помнишь, мы считали, что вероятность двух мальчиков и двух девочек – три восьмых. Это самое вероятное, но не очень вероятное. Тогда мы стали прогнозировать от одного до трёх мальчиков, и вероятность получилась семь восьмых, ну, чтобы спиннинги купить правильно. Я ещё потом рисовал дерево для шести детей и потратил двойной листок. А если для трёхсот пассажиров рисовать, я думаю, что и за день не справлюсь.

– Ты и за триллион лет не справишься, – подтвердил папа.

Стас решил, что папа шутит, имея в виду, что Стас ленив (факт) и ему быстро надоест (не факт). Впрочем, известно, что, когда дело касается математики, папины шутки могут оказаться не шутками. Всё же Стас решил не отвлекаться и вопрос про триллион лет оставить на потом.

– Короче, пап, можно обойтись без графа?

– Для чего?

– Чтобы найти вероятность того, что из 300 детей, то есть я хотел сказать пассажиров, ровно 150 захотят курицу.

– Мы не знаем вероятность того, что отдельный пассажир предпочитает курицу.

– Пусть будет 1/2 – для определённости. И ещё: для краткости будем называть их *куролюбами* и *рыбоедами*.

– Хорошо, – папа хохотнул. – Формализуем задачу. Каждый пассажир с равными шансами может оказаться куролюбом или рыбоедом. Нужно найти вероятность того, что из трёхсот пассажиров ровно 150 – куролюбы.

– И ещё нужно сделать прогноз числа куролюбов.

[1] См. статью «Приключения Стаса» в «Квантике» № 3 за 2013 год.

– Начнём с первой задачи. – Папа закрыл калькулятор и запустил Excel – процессор электронных таблиц, Стас вспомнил уроки информатики, где они как раз начали изучать эту странную программу. Тем временем папа продолжил: – Сверху напишем: «Расчёт числа куролюбов».

Стас подумал, что было бы правильно назвать таблицу «Расчёт вероятности», но промолчал. Папа увлёкся:

– Как, говоришь? Вероятность быть куролюбом равна 0,5? Пусть будет так. В ячейку A3 запишем: «Вероятность p=», а в B3 запишем 0,5. Пассажиров сколько?

– Триста.

– Отлично. В A4 запишем «Число пассажиров n=», а справа в ячейку B4 введём 300. Сколько куролюбов тебя интересует? Сто пятьдесят? Замечательно. В A5 вводим «Число куролюбов k=», а в B5 впишем 150.

– А зачем все эти пэ, эн, ка?

– Для культуры вычислений, дорогой мой. Мы же культурные люди. Каждая нужная величина получила обозначение. Теперь подсчитаем вероятность того, что куролюбов ровно 150 из 300. Воспользуемся функцией БИНОМРАСП.

– Как?

– БИНОМРАСП – это от слов «биномиальное распределение».

– Какое?

– Сейчас неважно. Важно то, что эта функция как раз и даст нам нужную вероятность того, что из 300 пассажиров ровно 150 – куролюбы. В ячейке A6 напишем: «Вероятность $P(k)$=», а в B6 впишем формулу «=БИНОМРАСП(»... – Как только папа поставил скобку, программа мелким шрифтом выдала подсказку.

	A	B
1	**Расчёт числа куролюбов**	
2		
3	Вероятность *p*=	0,5
4	Число пассажиров *n* =	300
5	Число куролюбов *k*=	150
6	Вероятность *P*(*k*)=	=БИНОМРАСП(...

БИНОМРАСП (**число_успехов;** число_испытаний; вероятность_успеха, интегральная)

Папа, видимо, не очень помнил, в каком порядке нужно вписывать числа в скобки, и поэтому стал неторо-

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

пливо и с удовольствием объяснять это Стасу:

– Число успехов. Так, успехами считаем куролюбов. Укажем ячейку B5. Точка с запятой. Далее – число испытаний, то есть число пассажиров. Вписываем B4 и ставим точку с запятой. Теперь вероятность успеха...

– Это из B3 и опять точку с запятой. – Стас разобрался и перехватил инициативу, но тут увидел слово «интегральная» и остановился в недоумении. – Это ещё что?

Папа подумал секунду, потом что-то сообразил и вписал на место странного слова число ноль.

	A	B
1	**Расчёт числа куролюбов**	
2		
3	Вероятность *p*=	0,5
4	Число пассажиров *n* =	300
5	Число куролюбов *k*=	150
6	Вероятность *P*(*k*)=	=БИНОМРАСП (B5; B4; B3; 0)

– Нажимаем ввод. Вуаля, получите! – Папа выделил результат красным цветом и театральным жестом пригласил полюбоваться, хотя Стас и так всё прекрасно видел.

	A	B
1	**Расчёт числа куролюбов**	
2		
3	Вероятность *p*=	0,5
4	Число пассажиров *n* =	300
5	Число куролюбов *k*=	150
6	Вероятность *P*(*k*)=	0,046

Вероятность того, что из трёхсот пассажиров ровно сто пятьдесят предпочтёт курицу, оказалась, прямо скажем, невысокой. А ведь это самое вероятное, подумал Стас. Он отобрал компьютер у папы и начал менять числа в ячейке B5. Так и есть: вероятность, что куролюбов 149 или 151, оказалась 0,0457. Вероятность того, что куролюбов только 120, оказалась вообще 0,0001. То же самое и для 180. Стас немного подумал над этим результатом и набрёл на новую мысль: значит, куролюбов не может быть слишком много или слишком мало. Можно построить правдоподобный прогноз. Только как? Придётся складывать вероятности того, что куролюбов 150, 149, 151, 148, 152 и так далее, пока не получится приемлемая надёжность прогноза. Ничего себе работёнка!

Окончание в следующем номере

Художник Алексей Вайнер

СТЕПЕНИ КАК СУММЫ, или МАГИЯ МЁССНЕРА

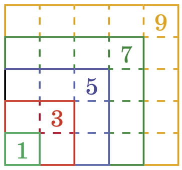
СМОТРИ!

Материал подготовил
Григорий Мерзон

Если выбросить из натурального ряда все чётные числа, то суммировать оставшиеся, нечётные числа легко и приятно – получаются просто квадраты:

$$\begin{aligned} 1+3 &= 4\ (=2\times 2)\\ 1+3+5 &= 9\ (=3\times 3)\\ 1+3+5+7 &= 16\ (=4\times 4)\\ 1+3+5+7+9 &= 25\ (=5\times 5)\end{aligned}$$

Это, кстати, можно объяснить геометрически: например, квадрат 5×5 состоит из угловой клетки, примыкающего к ней уголка из трёх клеток, следующего за ним уголка из пяти клеток и т.д.



5×5

А что если вычёркивать не каждое второе, а каждое третье число?

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~
1	3		7	12		19	27		37	48	

На первый взгляд, в последовательности сумм (она написана во второй строке) закономерности не видно. Но не будем отчаиваться, а выкинем уже из этой последовательности сумм каждое второе число и просуммируем. Получатся... кубы!

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	~~9~~	10	11	~~12~~
1	~~3~~		7	~~12~~		19	~~27~~		37	~~48~~	
1			**8**			**27**			**64**		

Аналогично можно получить и четвёртые степени (если начать с вычёркивания каждого четвёртого числа, потом в суммах вычеркнуть каждое третье, и в суммах сумм – каждое второе), и какие угодно ещё. Это открыл Альфред Мёсснер (Alfred Moessner) в 1951 году. С тех пор появились разные доказательства этого факта – некоторые из них обсуждаются, например, в видеоролике Буркарда Полстера kvan.tk/moessner – но в основном не такие уж простые. Может быть, вы придумаете своё объяснение?

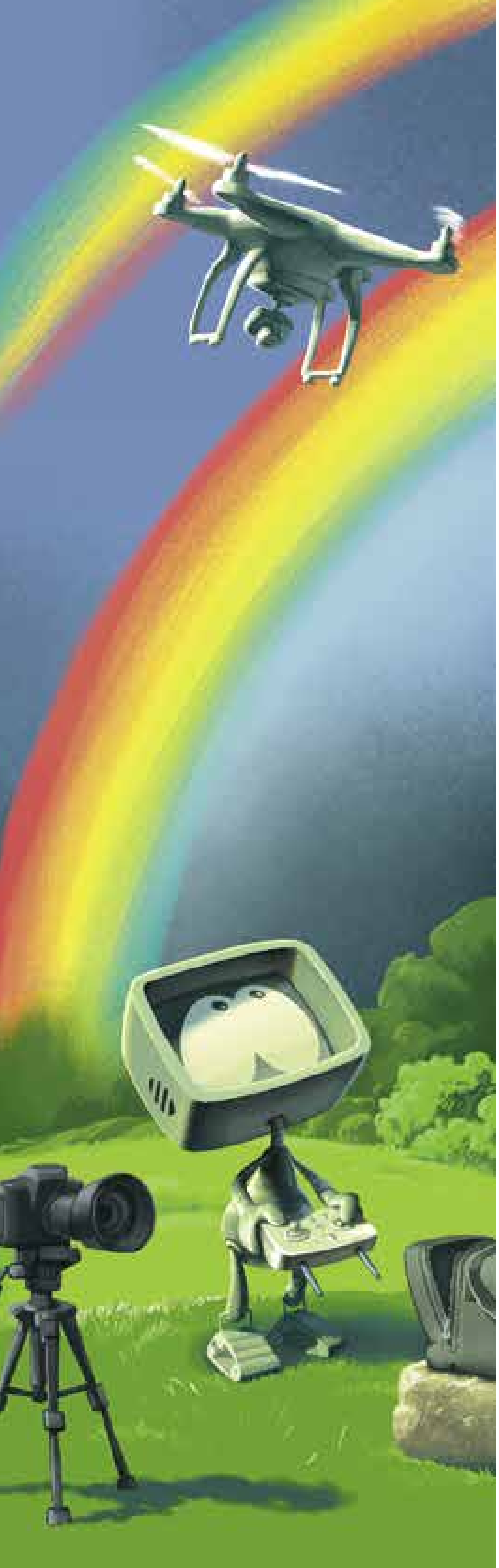
В заключение посмотрите на таблицу чисел ниже и попробуйте придумать (а может, и доказать?) ещё одну теорему, похожую на теоремы Мёсснера.

1	2	~~3~~	4	5	~~6~~	7	8	9	~~10~~	11	12	13	14	~~15~~
	2		6	~~11~~		18	26	~~35~~		46	58	71	~~85~~	
			6			24	~~50~~			96	154	~~225~~		
						24				120	~~274~~			
										120				

Художник Сергей Чуб

ФОТОГРАФИЯ РАДУГИ

Леонид Свистов



Эта фотография сделана ранним вечером сразу после небольшого дождика с дрона (маленького вертолётика) с фотокамерой. На ней видны две радуги, представляющие из себя окружности с общим центром. Почему так получилось?

Фото: А. Подобедов

Обратимся к рисунку из книги «Оптика» Исаака Ньютона (рис. 1).

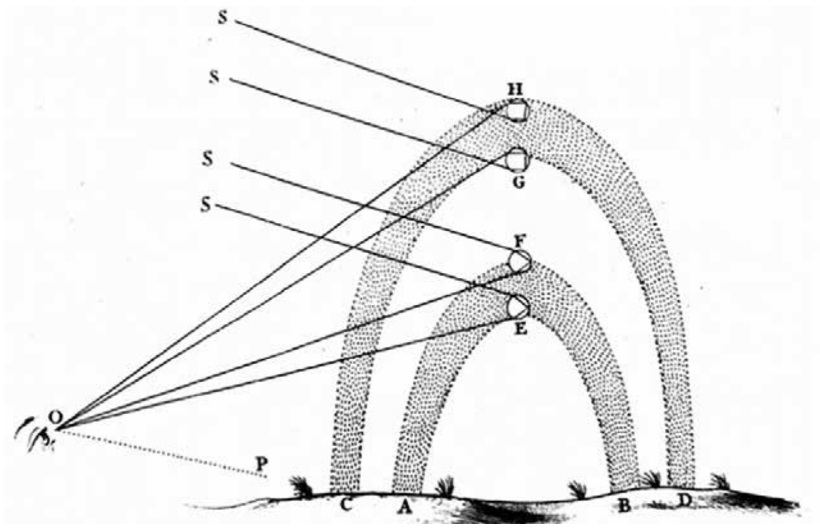


Рис. 1

Обе радуги возникают из-за того, что солнечные лучи отражаются в каплях воды. Причём первая радуга связана с лучами, которые доходят от солнца S

до наблюдателя *O*, отражаясь внутри капель один раз (как показано в каплях *F* и *E*), а вторая – с лучами, которые отражаются внутри капель дважды (капли *H* и *G*). Понятно, почему на фотографии радуга – не дуга (как мы обычно видим её с земли), а полная окружность, так как капли есть и выше, и ниже дрона.

На фотографии видно, что внутренняя радуга более яркая и имеет привычное чередование цветов, а внешняя имеет обратный порядок. А ещё изображение внутри первой радуги и область снаружи второй радуги более светлые, чем промежуток между радугами. Чтобы объяснить это наблюдение, рассмотрим ход солнечного луча внутри капли, считая её круглой.

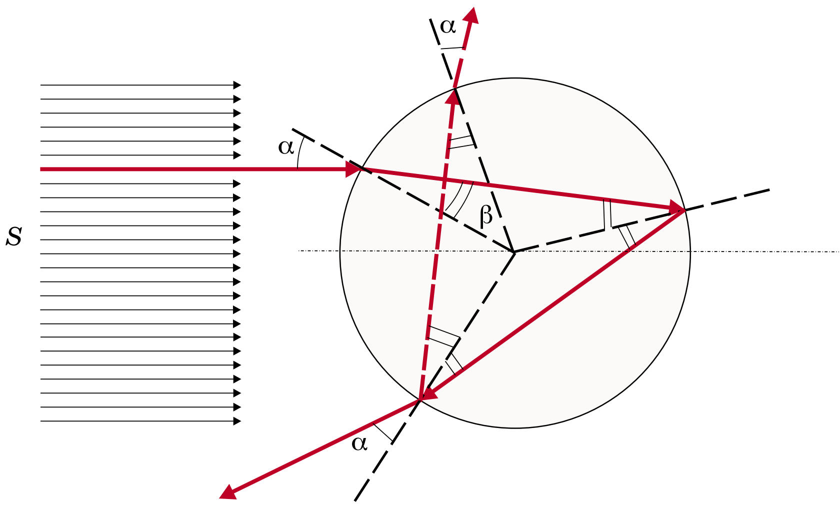


Рис. 2

Каждый раз, сталкиваясь с поверхностью капли (снаружи или изнутри), луч разделяется на два – отражённый и преломлённый (лучи при этом становятся менее яркими). Красной сплошной линией на рисунке 2 изображён луч, который вошёл в каплю, преломившись, затем прошёл внутри капли до её границы, там отразился и, ещё раз пройдя каплю, вышел наружу, снова преломившись. Штриховой красной линией показан луч, который сделал ещё одно «лишнее» отражение внутри капли, прежде чем выйти наружу.

Отражение устроено просто: угол между лучом и радиусом, проведённым в точку отражения, равен

углу между радиусом и отражённым лучом (радиусы отмечены штриховой тонкой линией).

При входе или выходе из капли ход луча меняется по закону преломления. Этот закон можно представить геометрически: построим два прямоугольных треугольника с равными гипотенузами, как на рисунке 3. Тогда отношение отмеченных катетов не зависит от угла падения и равно показателю преломления, который для воды примерно равен 1,33.

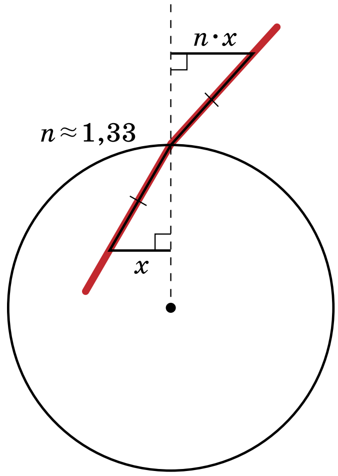


Рис. 3

Направление, в котором луч выйдет из капли, зависит от того, в какое место капли он приходит от солнца. Мы вычислили и построили ход всех солнечных лучей, изображённых на рисунке 2 слева (чёрные стрелки). Выходящие из капли лучи, получившиеся в результате построения, изображены на рисунке 4. Сплошными линиями показаны лучи, отразившиеся внутри капли один раз, а штриховыми – лучи, отразившиеся дважды; капля находится в центре рисунка.

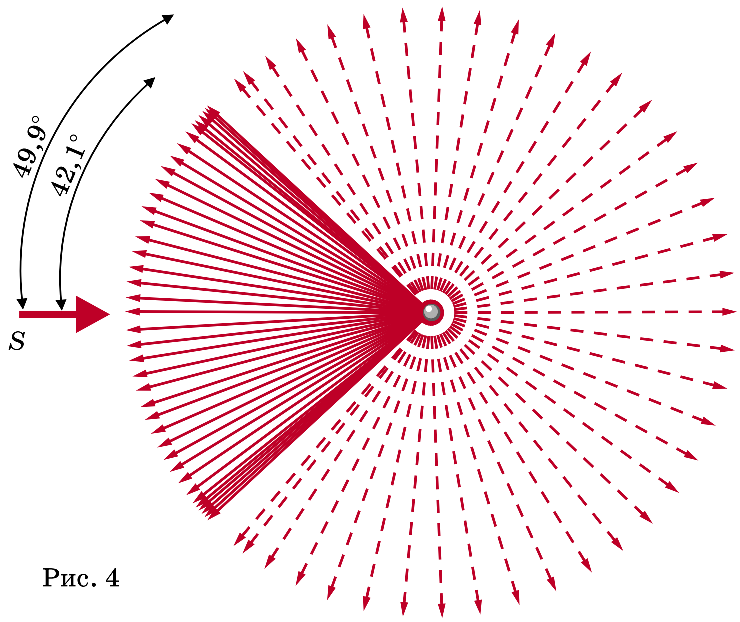


Рис. 4

Получается, что каждая капля работает как маленький хитрый фонарик. Сплошные лучи «заметают» угол, биссектриса которого направлена на солнце. Как видно, больше всего сплошных лучей направлено дальше всего от солнца, под углом 42,1°. Штриховые лучи заметают угол, биссектриса которого направлена от солнца. Больше всего штриховых лучей направлено ближе всего к солнцу: под углом 49,9°. Важно, что есть интервал углов, куда фонарик не светит вовсе! Теперь нам осталось только рассмотреть множество таких капель-фонариков и наблюдателя, как нас учит рисунок из работы И. Ньютона.

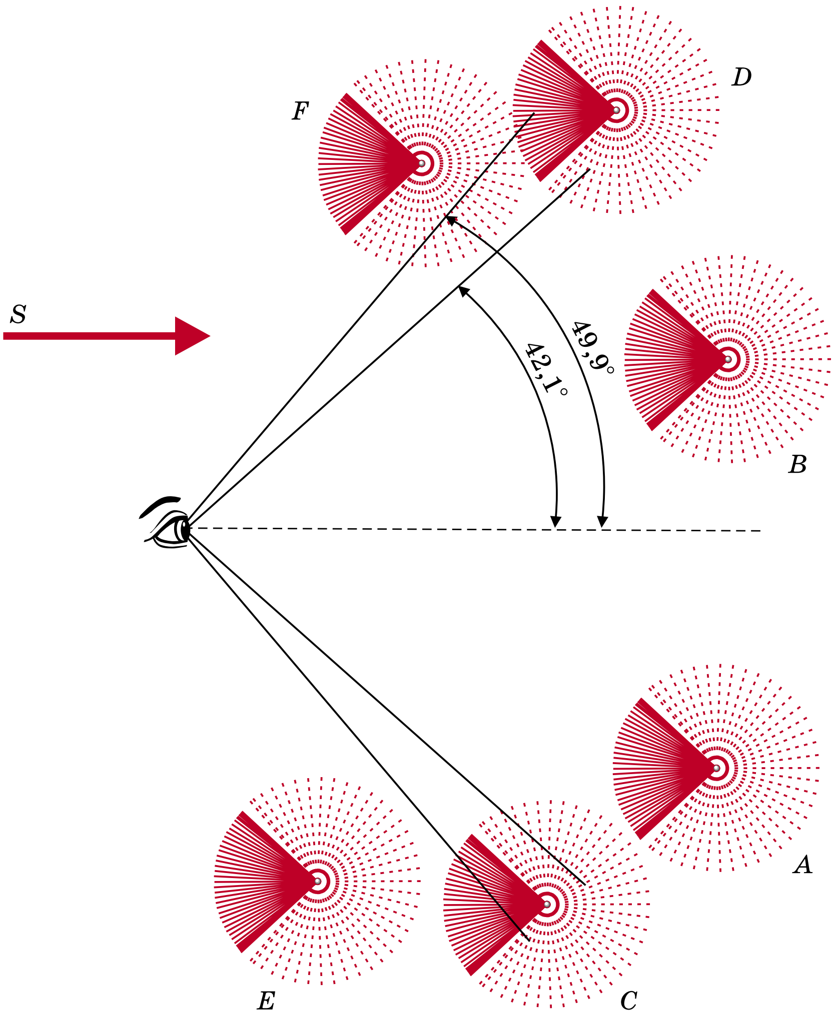


Рис. 5

Капли, которые находятся внутри конуса с углом 42,1° (например, капли A, B), будут освещать наблюдателя лучами, которые отразились один раз: наблюдатель будет видеть светлый круг. Среди отражённых лучей нет тех, которые бы дошли до наблюдателя под углом от 42,1° до 49,9°, поэтому наблюдатель увидит тёмное кольцо (капли C, D не освещают наблюдателя). Под большими углами наблюдатель увидит свет от лучей, которые отразились два раза (капли E, F).

Светлый центральный круг на фотографии на с. 8 гораздо ярче вблизи его краёв. Это связано с тем, что плотность лучей вблизи максимального угла самая большая. Можно ожидать, что светлое внешнее кольцо будет самым ярким вблизи тёмного кольца, однако этого на нашей фотографии, к сожалению, не заметно.

Теперь мы должны вспомнить, что белый свет состоит из лучей разных цветов, а показатель преломления воды n немного зависит от цвета луча. Так, для красного цвета он примерно равен 1,33, а для фиолетового 1,34. Поэтому радиус светлого центрального круга красного цвета будет самым большим. Светлый круг оранжевого цвета будет иметь радиус поменьше, круг жёлтого цвета – ещё меньше и т. д. до фиолетового цвета, который светит в круге самого маленького радиуса. Наблюдатель будет видеть смешение светлых кругов разного цвета и радиуса. В результате граница светлого круга имеет красный цвет, а при уменьшении радиуса к нему постепенно примешиваются другие цвета, что и является причиной появления разноцветной радуги. Центральная часть круга подсвечена лучами всех цветов, то есть имеет белый цвет солнечного света.

По аналогии можно объяснить радужную окраску и порядок цветов второй радуги. Красный цвет также дальше всего заходит в тёмную зону, поэтому порядок цветов внешней радуги оказывается обратным.

Художник Мария Усеинова

Сергей Дориченко

СИГНАЛЬНЫЕ ОГНИ

Древнегреческий историк и военачальник Полибий, живший во II веке до нашей эры, в своей «Всеобщей истории» уделил несколько страниц сигнальным огням и своему усовершенствованию этого способа связи.

Люди издавна пользовались кострами и факелами для быстрой передачи информации на большое расстояние (в три-четыре дня пути и даже больше). Но первоначально, пишет Полибий, делалось это очень примитивно. Легко было сообщить (правда, без подробностей) об опасности, например просто разведя большой огонь, или, скажем, заранее договориться, как сообщить о прибытии флота в Халкиду. Но часто случались самые разные непредвиденные события (переход части граждан к неприятелю, измена, кровопролитие в городе и т.п.), когда требовалась быстрая помощь или совет, а сигнальные огни не позволяли передать точную информацию. Как же быть?

В IV веке до нашей эры появилось усовершенствование – водяной телеграф. Полибий приводит его описание, сделанное Энеем Тактиком, автором сочинения «О военном искусстве». Люди догадались добавить к факелам водяные часы (клепсидру) – сосуд с небольшой дырочкой на дне, через которую равномерно вытекала вода. Такими часами отмеряли, например, время для речей в суде, да и выражение «время истекло» возникло благодаря этим часам.

Идея была проста: надо сделать два больших совершенно одинаковых глиняных сосуда, приготовить одинаковые пробки, чуть меньшие в диаметре, чем горлышки сосудов, а в пробки воткнуть посередине одинаковые длинные палки, разделённые чёрточками на равные части. На каждом делении пишется какое-то важное событие, наиболее вероятное по ходу войны, например: «Конница вторглась в страну», «Тяжёлая пехота», «Легковооружённые», «Пехота и конница», «Суда», «Хлеб» и т. д.

Затем на дне каждого сосуда делают по одинаковой дырочке, чтобы вода из них вытекала равномерно и с одинаковой скоростью. Водяной телеграф готов!

Теперь в двух удалённых местах, которые хотят общаться друг с другом с помощью сигнальных огней, устанавливают по такому сосуду с палкой и заливают водой, закрыв дырочки. Если надо отправить сообщение (имеющееся на палочке!), передающий поднимает факел и ждёт ответного факела. Как только оба огня подняты, их убирают и тут же открывают дырочки, выпуская воду. Пробки с палками постепенно опускаются, и когда у передающего нужная надпись поравняется с верхним краем сосуда, он опять поднимает факел. Заметив огонь, принимающий тут же закрывает дырочку и смотрит, какая надпись сейчас у края его сосуда. Сообщение передано!

Современная реконструкция античного водяного телеграфа. Фото: Gts-tg, Википедия.

Но водяной телеграф не достигал своей цели. Ведь невозможно не только предусмотреть всё, что случится, но даже нанести всё предусмотренное на палочку. Да и сами надписи очень приблизительные, без подробностей.

Нужна была новая идея, и её придумали Клеоксен и Демоклит, а усовершенствовал сам Полибий. Предлагается взять все буквы алфавита подряд и разделить на пять частей по пять букв[1]. Желающие общаться с помощью сигнальных огней изготавливают себе по пять досок и на каждую доску наносят одну из групп букв по порядку.

[1] В греческом алфавите 24 буквы, и Полибий уточняет: «Хотя в последней группе одной буквы и не достанет, это не мешает».

Передающий поднимает два факела и не опускает, пока не ответит другая сторона. Потом факелы убирают, и передающий показывает первую букву сообщения, поднимая факелы слева и справа. Факелы слева указывают, какую доску смотреть (один факел – первую, два – вторую и т.д.), а факелы справа – какую по счёту букву на доске должен написать принимающий. Затем передаётся вторая буква и т.д.

Α	Ζ	Λ	Π	Φ
Β	Η	Μ	Ρ	Χ
Γ	Θ	Ν	Σ	Ψ
Δ	Ι	Ξ	Τ	Ω
Ε	Κ	Ο	Υ	

Полибий описывает процесс передачи очень подробно и даёт множество практических советов. Например, желательно иметь зрительный прибор с двумя отверстиями, чтобы видеть через одно отверстие правую сторону, а через другое – левую. Возле зрительного прибора он предлагает слева и справа сделать забор высотой в человеческий рост, за которым будут стоять факельщики, чтобы поднятые над забором факелы ясно различались, а убранные – совсем спрятались и не мешали. Сами сообщения Полибий советует составлять как можно более кратко: скажем, вместо «Часть солдат, человек сто, перешла к неприятелю» можно передать «Сотня критян перебежала от нас», не изменив сути.

Полибий пишет, что хотя новый способ требует большого числа факелов, а также старания и неослабного внимания, но зато он позволяет передавать сообщения в точности и вполне практичен. В подтверждение он даже делает сравнение с чтением. Если вообразить себе человека безграмотного и не знакомого с письмом, он вряд ли поверит, что можно освоить столь трудное дело: запомнить отдельно начертание и звучание каждой буквы, потом научиться произносить слова, да ещё делать это быстро и с выражением.

«Кажущиеся вначале трудности, – пишет Полибий, – не должны отвращать нас от полезного дела; напротив, следует освоиться с ним посредством упражнения, с помощью коего человек достигает всевозможных благ, особенно когда речь идёт о средствах, от которых часто зависит наше спасение».

Художник Артём Костюкевич

На планетах, спутниках и орбитальных станциях

Перед вами – четыре задачи, предлагавшиеся в разное время на Московской астрономической олимпиаде для школьников. Проводится она с 1947 года, и более 450 её задач с решениями можно найти в книге В.Г. Сурдина «Астрономические олимпиады».

1. Можно ли, находясь на Меркурии, наблюдать метеоры («падающие звёзды»)? А удастся ли обнаружить на его поверхности метеориты?

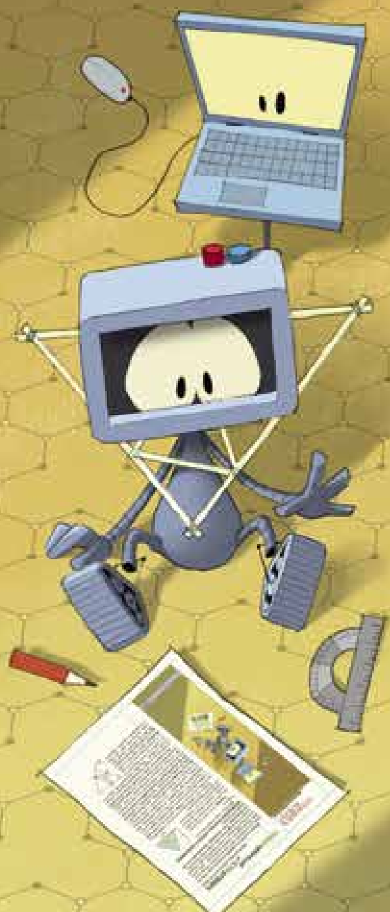
2. Где человеку легче держаться на воде: на Земле или на Луне? (Считайте, что человек плавает в бассейне в помещении с земной атмосферой.)

3. На Земле свеча горит 2 часа. Сколько часов такая же свеча будет гореть на борту околоземной орбитальной станции?

4. Американские астронавты на орбитальной станции «Скайлэб» в часы отдыха пытались развлекаться бросанием в мишень оперённых дротиков с присоской, но из этого ничего не вышло. Почему?

Художник Мария Усеинова

Владимир Протасов



ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ и СЕТИ ШТЕЙНЕРА

Продолжение. Начало в № 10, 2021

Иногда полезно по-разному доказать один и тот же факт. Это позволяет посмотреть на него с разных сторон. Чтобы ощутить красоту скульптуры – надо обойти её вокруг! Теорема о точке Торричелли (из которой каждая сторона треугольника видна под углом 120°) – не исключение. Вот, например, как доказать её с помощью площадей.

ПЛОЩАДИ И ТЕОРЕМА О ТРЁХ РАССТОЯНИЯХ

Начнём с такого замечательного факта:

Теорема 5 (о трёх расстояниях). *Сумма расстояний от любой точки внутри равностороннего треугольника до его сторон равна высоте треугольника.*

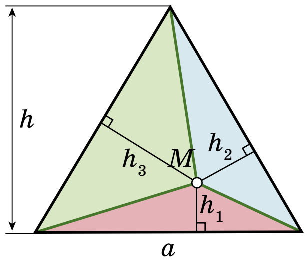


Рис. 7

Значит, для любой точки M внутри треугольника эта сумма одна и та же. Чтобы доказать это, обозначим сторону и высоту исходного треугольника через a и h и соединим M с вершинами. Исходный треугольник разобьётся на три меньших. А теперь вспомним, что площадь треугольника – это половина произведения его стороны на высоту, проведённую к этой стороне. Высоты меньших треугольников – это как раз расстояния до сторон исходного треугольника, и опущены они на стороны одной и той же длины a. Поэтому сумма этих расстояний, умноженная на a, равна удвоенной площади исходного треугольника, то есть равна произведению ah. Сокращая на a, получаем требуемое.

Ну и какая тут связь с точкой, сумма расстояний от которой до сторон наименьшая (задача 3 из прошлого номера)? Возьмём произвольный треугольник ABC и его точку Торричелли T (предполагаем, что она есть). Проведём через вершину A прямую, перпендикулярную отрезку TA. Так же сделаем с двумя другими вершинами (рис. 8). Три получившиеся

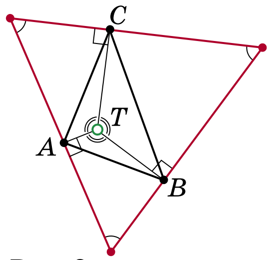


Рис. 8

прямые образуют треугольник. Он равносторонний: все его углы равны 60° (почему?). Сумма расстояний от точки T до сторон равностороннего треугольника (она же – сумма расстояний от T до вершин треугольника ABC) равна его высоте. И сумма расстояний от любой другой точки M до его сторон тоже равна высоте. Но теперь эта сумма будет меньше, чем сумма расстояний от M до вершин ABC, ведь расстояние до каждой вершины больше расстояния до стороны (наклонная больше перпендикуляра). Получается, что сумма расстояний от M до вершин треугольника ABC больше, чем сумма расстояний от точки T.

НЕМНОГО ФИЗИКИ

Как мы упоминали, сам Торричелли, по-видимому, вывел свою теорему из физических соображений. Мы не знаем, каких именно, но тоже попробуем получить физическое доказательство. Хотя нам понадобятся понятие потенциальной энергии и закон сложения сил, рассуждение будет интуитивно понятным.

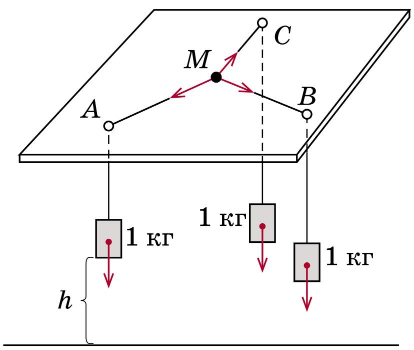
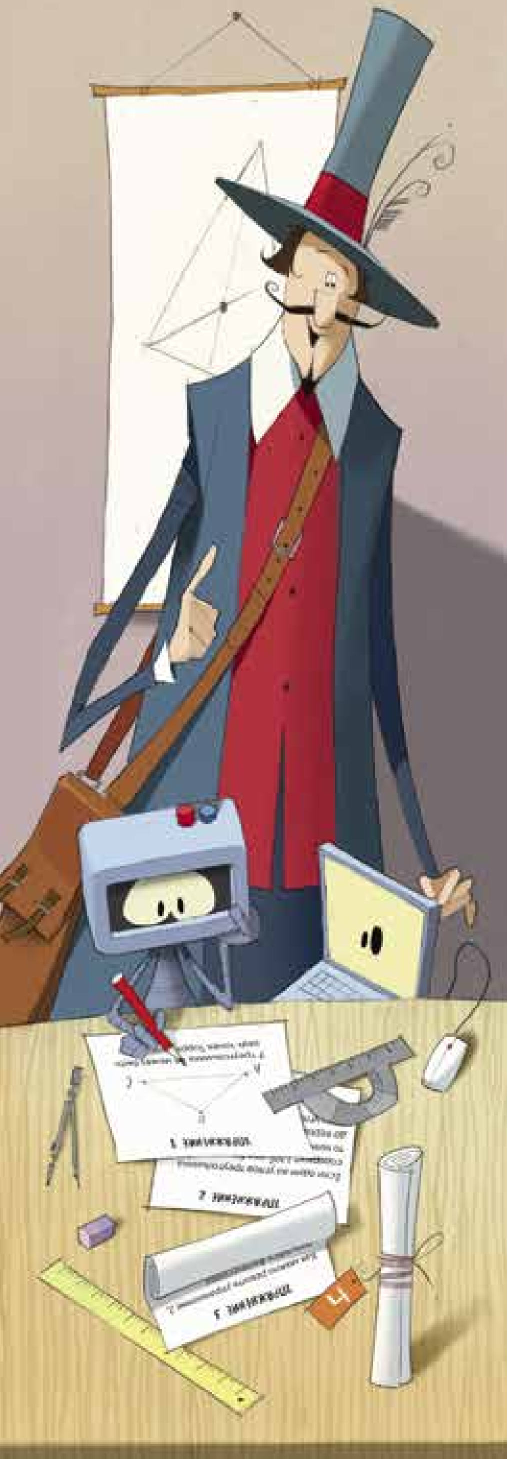


Рис. 9

Представим, что треугольник ABC нарисован на столе. Просверлим три дырки в вершинах A, B и C и пропустим в них по верёвке. Все три верёвки свяжем узлом над столом, а под столом к каждой верёвке привесим груз в 1 кг. Отпустим верёвки и грузы. Вся система после колебаний придёт в равновесие (рис. 9). Мы утверждаем, что в положении равновесия узел попадёт ровно в точку Торричелли треугольника ABC. Это следует из такого физического принципа: механическая система достигает равновесия, когда её потенциальная энергия минимальна. Иными словами, любая система стремится уменьшить свою потенциальную энергию. И останавливается, когда уменьшать уже некуда. Мы наблюдаем это каждый



день повсюду: если отпустить растянутую пружину, она снова сожмётся; брошенный вверх камень упадёт вниз и т.п.

У каждого груза потенциальная энергия пропорциональна его высоте над полом. Поэтому грузы стремятся уменьшить суммарную высоту, то есть вытянуть вниз как можно больше верёвки. Тем самым равновесие придёт, когда станет минимальной суммарная длина $MA+MB+MC$ верёвок на столе.

На точку M действуют три силы, равные весам грузов. Грузы равны, поэтому и силы равны. А в положении равновесия точка M не движется, поэтому сумма сил равна нулю. Сумма равных по величине сил равна нулю, когда все углы между ними равны по 120°. В самом деле, сложив силы, получаем, что они должны образовать треугольник, и он будет равносторонним. Поэтому силы образуют между собою равные углы. Следовательно, M – точка Торричелли.

Упражнение 1. Докажите, что у треугольника не может быть двух точек Торричелли.

Упражнение 2. Пусть один из углов треугольника не меньше 120°. Докажите, что минимум суммы расстояний до вершин достигается в вершине этого угла.

Указание. Пусть в треугольнике ABC угол C больше 120°. Проведём через вершины A, B прямые, перпендикулярные сторонам AC, BC соответственно, а потом проведём прямую через вершину C так, чтобы все три прямые образовали равнобедренный треугольник. Докажите, что его основание меньше боковой стороны. Далее рассуждайте так же, как при доказательстве теоремы 5.

Упражнение 3. Как можно решить упражнение 2, пользуясь физическими соображениями?

В упражнениях 4 и 5 (и только в них) потребуется знание вписанных углов.

Упражнение 4. В треугольнике ABC все углы меньше 120°. На его сторонах построены вовне три равносторонних треугольника. Докажите, что их описанные окружности пересекаются в точке Торричелли.

Упражнение 5. Докажите, что центры трёх окружностей из упражнения 4 – вершины равностороннего треугольника (он называется *треугольником Наполеона*).

СЕТИ ШТЕЙНЕРА

Ну, а теперь примемся за построение кратчайших систем дорог для любого числа городов – сетей Штейнера. Мы считаем известным, что кратчайшая система существует (это не так очевидно, как может показаться). Города нам даны, мы не можем менять их расположение. Но проводить дороги и ставить перекрёстки можем как хотим. Город и перекрёсток будем называть одним словом – *вершина*. Каждая дорога соединяет какие-нибудь две вершины. Ясно, что у кратчайшей системы все дороги прямые. Любой путь по дорогам от одной вершины до другой будем просто называть *путём*. Значит, все дороги – отрезки, а пути – ломаные. Найдём несколько обязательных свойств, которыми обладает кратчайшая система.

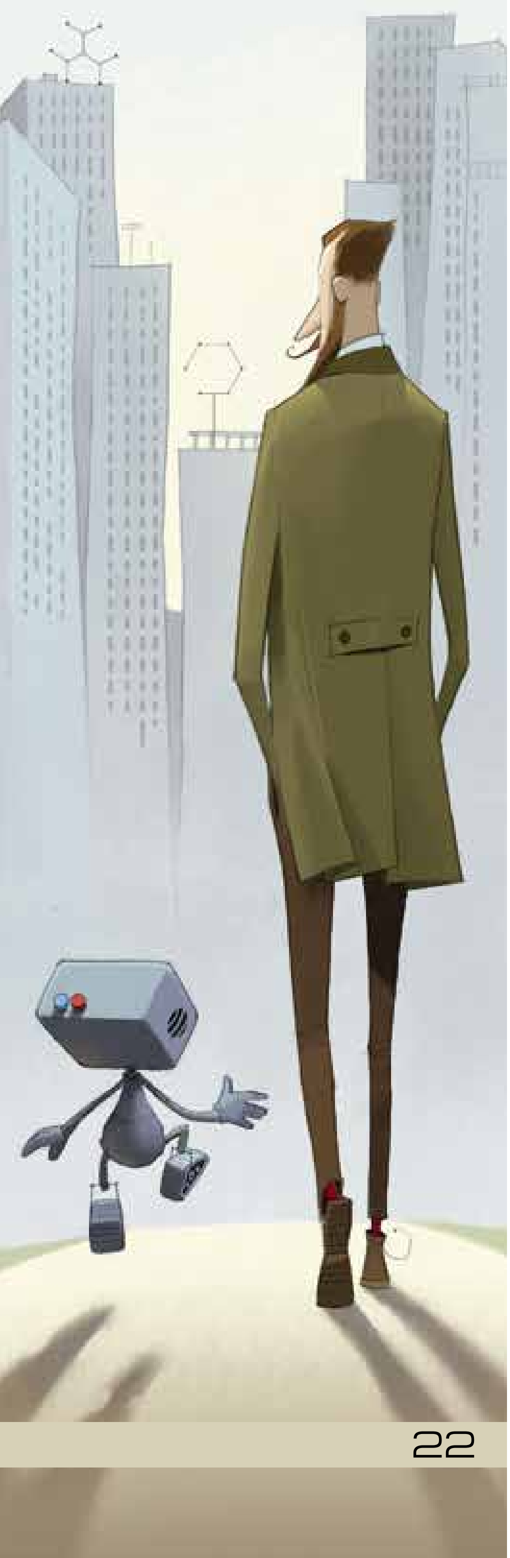
Свойство 1. *Каждые две вершины связывает единственный путь, а замкнутых путей нет.*

Это просто: если есть замкнутый путь, то его можно «разорвать», убрав любую дорогу. Общая длина дорог уменьшится, но из любого города по-прежнему можно проехать в любой другой. А если бы существовало два пути из одной вершины в другую, то они образовали бы замкнутый путь (для этого нужно один из путей проехать в обратном направлении).

Для следующего свойства нам понадобится **вспомогательный факт**: *Любые две дороги, исходящие из одной вершины, образуют угол, не меньший* 120°.

Предположим обратное: дороги MA и MB образуют угол, меньший 120°. Если два других угла треугольника AMB тоже меньше 120°, то у него есть точка Торричелли T. Поставим в ней новый перекрёсток, уберём дороги MA и MB, а вместо них сделаем три дороги, TA, TB и TM. Сумма длин всех дорог от этого уменьшится, потому что сумма длин трёх новых дорог меньше, чем двух старых (сумма расстояний до вершин треугольника AMB от точки Торричелли T меньше, чем от точки M). Значит, мы уменьшили общую длину дорог.

Если же один из двух других углов треугольника AMB, скажем, угол A, не меньше 120°, то уберём дорогу MB, а вместо неё сделаем новую дорогу MA. Заметим, что MB длиннее MA, поскольку лежит на-



против наибольшего угла треугольника. Значит, мы убрали длинную дорогу, заменив её короткой, то есть вновь уменьшили общую длину дорог.

Свойство 2. *Из каждого города выходит либо одна дорога, либо две, угол между которыми не меньше* 120°, *либо три под углами* 120°.

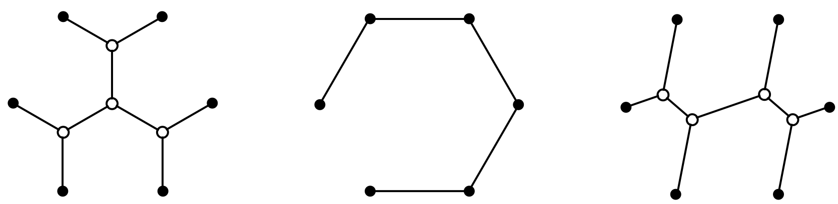
Четырёх быть не может, иначе среди них найдутся две дороги, образующие угол, меньший 120°. Если выходят три дороги, то все углы между ними равны по 120°, иначе опять-таки нашлись бы две дороги с углом меньше 120°.

Свойство 3. *Из каждого перекрёстка исходят ровно три дороги под углами* 120° *друг к другу*.

Из перекрёстка не может выходить одна дорога, иначе эту дорогу вместе с перекрёстком можно убрать. Также не может выходить две дороги. Иначе можно убрать эти дороги вместе с перекрёстком, а их концы соединить напрямую. Так что из каждого перекрёстка исходит ровно три дороги, и они образуют углы в 120°.

Подведём итоги. Сеть Штейнера обязана обладать свойствами 1, 2, 3: у неё нет замкнутых путей, в каждом перекрёстке сходятся три дороги под углами 120°, а в каждом городе либо сходятся три дороги под углами 120°, либо две дороги под углом не менее 120°, либо только одна дорога.

Дорожную сеть, обладающую свойствами 1, 2, 3, мы будем называть *допустимой*. Сеть Штейнера всегда допустима. А наоборот? Любая ли допустимая дорожная сеть является сетью Штейнера? Вообще говоря, нет. На рисунке 10 – три допустимые сети для одного и того же набора городов, и все они имеют разную длину. И тем не менее, свойств 1, 2, 3 хватит для построения сети Штейнера.



а) *б)* *в)*

Рис. 10

В следующем номере мы научимся строить сети Штейнера.

Окончание следует

Художник Алексей Вайнер

Владимир Красноухов

ТРАНСФОРМАЦИИ ПУСТОТЫ

Во многих головоломках надо сложить из деталей фигуру или уместить их в коробочке. В поисках решения мы пристраиваем детали друг к другу, а попутно вокруг них возникают пустоты разнообразной формы. Заманчиво использовать геометрические свойства «пустоты» для новых головоломок!

«Игры с пустотой» зачастую сложнее привычных задач на складывание. Ведь передвигаем мы материальные детали, а анализировать приходится непрерывно и неожиданно меняющуюся «пустую область».

Вот одна из таких головоломок. Состоит она из коробочки (рис. 1) и четырёх одинаковых плоских деталей (рис. 2), форма и относительные размеры которых показаны на единой сетке. (Поле и детали можно скачать по ссылке kvan.tk/pustota для распечатки.)

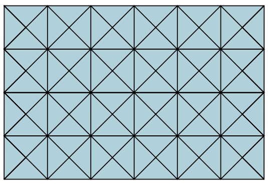


Рис. 1

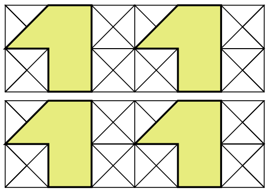


Рис. 2

Во всех предлагаемых задачах детали можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга; пустые области могут соприкасаться друг с другом вершинами углов.

Задача 1. Расставьте детали в коробочке так, чтобы образовались две одинаковые пустые области.

Нам известны 17 вариантов решения (см. примеры на рисунке 3), но лишь в одном пустые области расположены не симметрично друг другу. Найдите его.

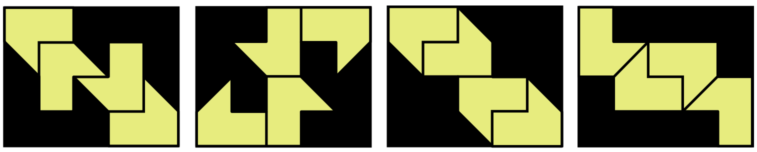


Рис. 3

Задача 2. Расставьте детали в коробочке так, чтобы образовались 4 одинаковые пустые области.

Задача 3. Расставьте детали в коробочке так, чтобы образовались 5 одинаковых пустых областей.

Автор головоломки (В. Красноухов) утверждает, что задачи 2 и 3 имеют единственное решение. Так ли это?

Желаем успехов!

Художник Мария Усеинова

Математический кружок

Валерия Толмачева

Всегда ли сто минус три равно 97?

– Завтра я буду вести уроки, – с гордостью произнёс Иван.

– Как это? – удивился Дима. – Ты ведь ещё только десятиклассник!

– Да, но 5 октября – день учителя. В этот праздник старшеклассники сами готовят уроки и проводят их в младших классах. Я мечтал об этом дне несколько лет! Я готовился к уроку целую неделю, скорее бы завтра! – воодушевлённый Иван зашагал домой, не дожидаясь ответа. А пятиклассник Дима с удивлением повторил:

– Несколько лет... Целую неделю... А я не буду ждать. – И уже через 15 минут Дима сидел за столом и придумывал задачи по математике.

– Вот Надежда Алексеевна обрадуется! Надо придумать что-то посложнее. Обязательно добавлю ребус, их долго решать. Ну и ещё что-нибудь.

Меньше, чем через час, Дима составил задачи и с чувством выполненного долга отправился на улицу играть в футбол.

Наступило долгожданное для Ивана 5 октября. Дима ждал этого дня не меньше. Он и его одноклассники очень любили свою учительницу. Как только Надежда Алексеевна вошла в класс, Дима торжественно произнёс:

– Сегодня праздник, поэтому я проведу урок за вас. Не волнуйтесь, задачи я подготовил!

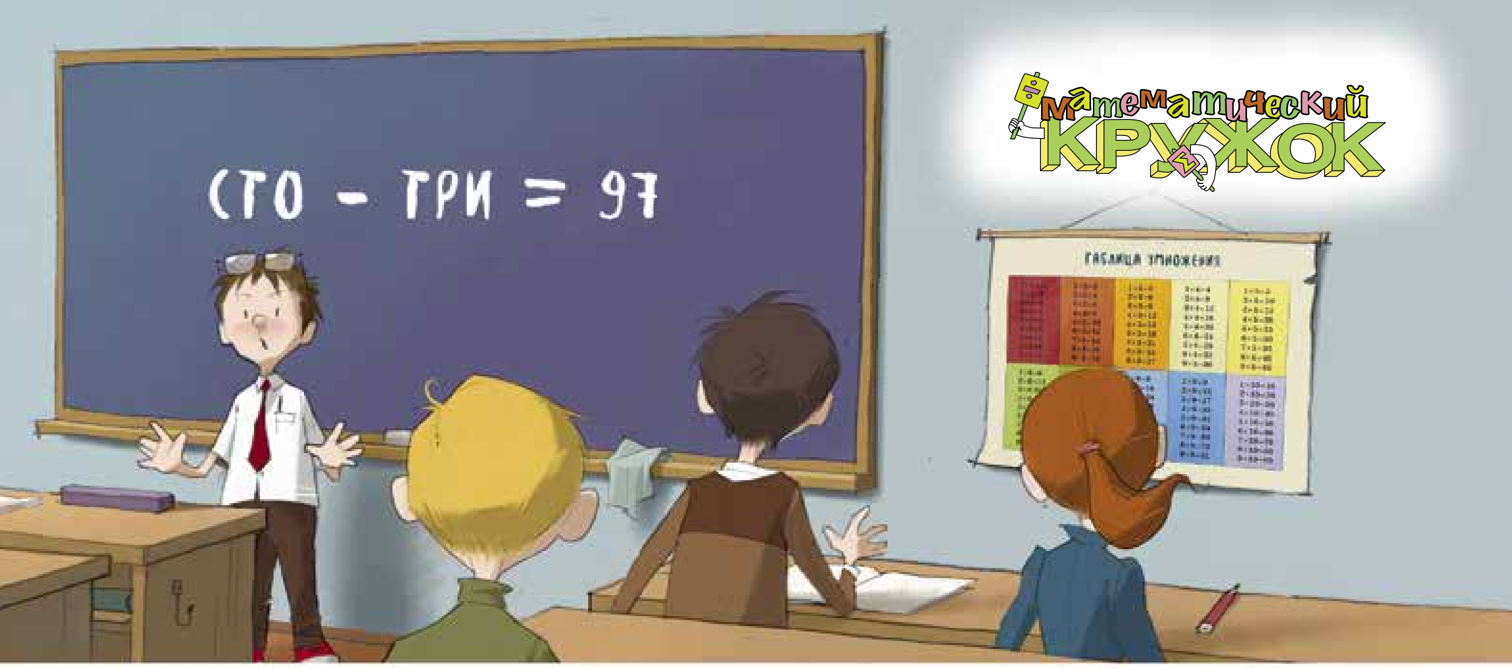
Надежда Алексеевна улыбнулась и молча села за парту, давая понять, что согласна побыть ученицей.

– Задание номер 1: найдите решение ребуса СТО – ТРИ = 97. Одинаковым буквам соответствуют одинаковые цифры, разным – разные.

Класс принялся решать задачу. Многие старались угадать ответ, подбирая различные трёхзначные числа, но ничего не получалось. Возможно, кто-то из ребят уже был близок к разгадке, но раздался голос учительницы:

– Подготовил ли ты ответ? – поинтересовалась Надежда Алексеевна.

– Нет, – уже менее торжественно сказал Дима. – Я подумал, что проверю ваше решение на калькуляторе.



– Ну что же, проверяй. Мой ответ: данный ребус не имеет решений. Подтверждает ли это калькулятор? – улыбнувшись, спросила учительница.

Ребята сидели в полном недоумении. Раньше они не встречали задач, в которых просят разгадать нерешаемый ребус. Прежде чем Надежда Алексеевна объяснит им, в чём же дело, попробуйте понять это самостоятельно.

– Во-первых, заметим, что в числе 97 нет разряда сотен, а также что, исходя из условия, буквам «С» и «Т» должны соответствовать разные цифры. Таким образом, при вычитании обязательно нужно будет «занимать» у цифры «С» одну единицу. Во-вторых, мы понимаем, что О – И = 7 или О + 10 – И = 7. В первом случае, с учётом замечания, Т – Р + 10 = 9, то есть Р = Т + 1. Но С – 1 – Т = 0, значит, С – это тоже Т + 1, что невозможно. Во втором случае понимаем, что Т – 1 + 10 – Р = 9, откуда Т = Р.

– Эх... – с грустью в голосе протянул составитель задачи.

– Такие задачи тоже бывают, Дима. Только в условие стоит добавить «или докажите, что ребус решений не имеет». Давай следующее задание.

– Текстовая задача! – снова торжественно, но уже не так уверенно произнёс Дима. – Сейчас возраст братьев Миши и Пети отличается в два раза. Сколько лет мальчикам, если через 25 лет квадрат суммы их возрастов будет равен 1024?

Надежда Алексеевна принялась составлять уравнение, но меньше чем через минуту положила ручку и вздохнула. (Вы уже решили задачу и поняли почему?)

– Неужели опять нет решений? – опустив в пол глаза, спросил Дима.

– В этот раз есть.

– Так, значит, с этой задачей всё в порядке? – радостно спросил мальчик.

– Давайте вместе ответим на этот вопрос.

Учительница пригласила к доске одного из учеников. С составлением уравнения проблем не возникло:

$$((x+25)+(2x+25))^2=1024,$$
$$(3x+50)^2=32^2.$$

Но после полученного ответа класс наполнился звонким смехом.

– Такие задачи нужно было задавать людям, жившим до нашей эры! – пошутил один из одноклассников Димы.

– Точно! Годы шли в обратном порядке, и возраст у людей был отрицательный, – подхватил другой.

Если бы эти шутки были не про Димину задачу, он бы, конечно, посмеялся. Но сейчас он думал о другом.

– Мне стоило догадаться, что задачи нужно решить! Не зря ведь авторы учебников вставляют в конце книги ответы – они показывают, что задания проверены и соответствуют действительности. А у меня даже сто минус три не равно девяноста семи!

– Не расстраивайся, Дима, – решила подбодрить своего сегодняшнего учителя Надежда Алексеевна, – и такие задачи бывают. После прочтения условия вовсе не очевидно, правдивая ситуация описана в задаче или нет. Зато правильно составленная математическая модель даёт ответ на этот вопрос.

Третью задачу Дима показывать отказался.

– Я лучше проверю её дома, а завтра всем расскажу, договорились?

Надежда Алексеевна кивнула. Оставшаяся часть урока была посвящена задачам, которые либо не имеют решений, либо приводят к очень странным ответам. Иногда класс снова наполнялся смехом. Дима уже смеялся вместе со всеми.

На следующий день мальчик показал классу третью задачу. Как оказалось, с самого начала её условие было составлено точно, а ответ не противоречил действительности.

Дима был рад своему опыту: он теперь знал, что подготовка к уроку – занятие непростое и ответственное. А его сверстники ещё долго шутили над младшеклассниками, что не всегда сто минус три равно девяноста семи.

Художник Алексей Вайнер

Улыбнись

Сергей Дворянинов

ТАК ЧТО ЖЕ ГОВОРИЛА МАМА?

Едва вернувшись погожим сентябрьским деньком из школы домой, Толик Втулкин получил сообщение от мамы:

Толику стало совестно. Да, вчера мама просила его что-то сделать, был такой разговор. Но что? Толик никак не мог вспомнить. О чём же шла вчера речь? За хлебом он зашёл по пути из школы. Газеты из почтового ящика забрал. Что же ещё? Надо сказать, что Толик почти никогда маму не огорчал и всегда помогал в домашних делах. Он вновь и вновь прокручивал в памяти вчерашний день, пытаясь не пропустить ни одной мелочи.

Да, какое-то задание вчера Толик получил. Почему же в сообщении сказано, что «теперь об *этом* напоминаю»? Ведь никакое *ЭТО* в сообщении не указано... Толик снова и снова пробегал глазами короткий мамин текст без знаков препинания (видимо, мама второпях диктовала на телефон), не просто читая слова, а вчитываясь в них и стараясь вникнуть в их смысл...

– Так, – начал размышлять Толик. – Учитель математики говорил, что условие любой задачи надо выучить наизусть, чтобы условие «вертелось» в голове и не надо было искать его на бумаге. И говорить нужно единственно правильным образом. Бывают, конечно, варианты: творо́г и тво́рог, фено́мен и феноме́н, один математик скажет аси́мптота, а другой асимпто́та... Сообщение уже так отпечаталось в моей памяти, что я, похоже, буду помнить его всегда. Попробовать прочитать его с выражением, продекламировать его так, словно я мастер художественного слова на сцене? Не спеша, с чувством, с толком, с расстановкой?

Толик уже набрал в грудь побольше воздуха, как вдруг произошло маленькое чудо. Помимо его сознания буквы перепрыгнули с одного места на другое и...

– Эврика! Я вспомнил, что говорила мама!..

Так что же вспомнил Толик?

Художник Ольга Демидова

НАШ КОНКУРС, I тур («Квантик» № 9, 2021)

1. *На склад, пол которого имеет вид прямоугольника 3×7 клеток, привезли кубический холодильник, он занимает одну клетку. Холодильник можно перекатывать через ребро, ставя на бок, но нельзя переворачивать вверх ногами. Нарисуйте пример пути, по которому можно перекатить холодильник из нижней левой клетки в правую верхнюю, чтобы и в начале, и в конце он стоял дном вниз, если изначально*

а) склад пустой (рис. 1);

б) на складе уже заняты две клетки (рис. 2).

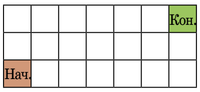
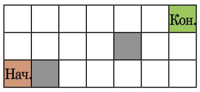
Рис. 1


Рис. 2


Ответ: см. примеры на рисунках 3 и 4.

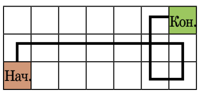
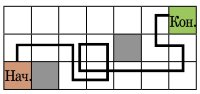
Рис. 3


Рис. 4


2. *Полина, Лена и Ирина впервые пришли на кружок и решили познакомиться.*

– Меня зовут Лена, – сказала одна из них.

– А меня зовут Ирина, – сказала вторая.

Третья девочка промолчала.

Известно, что Полина всегда говорит правду, Лена всегда лжёт, а Ирина иногда говорит правду, а иногда – неправду. Как на самом деле зовут каждую из девочек?

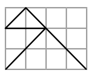
Ответ: первую зовут Ирина, вторую – Лена, третью – Полина. Полина могла сказать только своё настоящее имя, значит, на самом деле она промолчала. Лена, наоборот, своё имя назвать не могла, следовательно, она говорила второй, а первая девочка – Ирина.

3. *а) Можно ли разрезать какой-нибудь прямоугольник на несколько равнобедренных прямоугольных треугольников, среди которых нет одинаковых?*

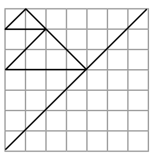
б) Можно ли так разрезать квадрат?

Ответ:

а) да, например, прямоугольник 3×4:



б) да, см. пример справа.



Понять, что треугольники разные, легче всего по площади (она легко считается, так как каждый треугольник разбивается на клеточки и их половинки). Наиболее «близки» два треугольника над диагональю, примыкающие к ней сторонами (в них 8 и 9 клеточек).

4. *Расставьте в клетках квадрата 3×3 различные натуральные числа, в записи каждого из которых могут присутствовать лишь цифры 1 и 2, так чтобы сумма чисел в каждой строке и в каждом столбце была одна и та же.*

Ответ: см. пример справа.

1121	2111	1212
2211	1122	1111
1112	1211	2121

Замечание: трёхзначными числами обойтись не получится, поскольку различных трёхзначных чисел, состоящих только из 1 и 2, всего 8, а в таблице 9 мест.

5. *Есть проволочный каркас прямоугольного ящика и верёвка. Разрешается выбрать любые несколько точек на каркасе, соединить их подряд натянутой верёвкой и измерить её длину, от первой точки до последней. Предложите способ за два таких измерения найти суммарную площадь всех шести граней ящика.*

Пусть ящик имеет длину Д, ширину Ш и высоту В. Первым измерением натянем верёвку между противоположными вершинами и найдём длину главной диагонали. По теореме Пифагора её квадрат равен $Д^2+Ш^2+В^2$. Вторым измерением проложим верёвку вдоль трёх последовательных рёбер в различных направлениях и узнаем сумму $Д+Ш+В$.

Теперь мы можем вычислить $(Д+Ш+В)^2-(Д^2+Ш^2+В^2)=2ДШ+2ВШ+2ВД$, что равно сумме площадей граней ящика.

КУПЦЫ И СЛОВАРИ («Квантик» № 10, 2021)

Во всех словарях видно, что есть две системы денежных единиц – новгородская и московская, причём в обеих есть *рубль* (рꙋбел, Rubell), *полтина*, *гривна* (гриве$^{\text{н}}$, grywna, gryuen, griuen, немецкий эквивалент – марка, mar(c)k). Авторы приводят все единицы к *денгам* (deng, deni(c)k, den(n)ing).

Новгородская гривна – это 14 («satyrnatseth»)денег, московская гривна – 10 денег.

Полтина – всегда половина рубля. У неизвестного автора это сказано явно, у Тённи Фенне – это половина московского рубля. У Томаса Шрове московская полтина составляет 3½ гривны (это следует из немецкого перевода «3½ marck»; опознать «три с половиной» в русском «polsetforty» трудно, но вспомним в современном русском языке «полчетвёртого» = «три с половиной часа») и одну денгу – это как раз половина московского рубля (7 гривен и две денги). Так же новгородская полтина (7 гривен и 10 денег) – половина новгородского рубля (15 – «petnaset» – гривен и 6 денег); здесь надо учесть, что новгородская гривна – это 14 денег, тогда всё сойдётся.

Осталось понять, сколько денег составляют рубль. У Томаса Шрове новгородский рубль – это 216 денег (15×14+6). Про московский рубль могут быть две гипотезы: если в соответствующей строчке (Rubell moskausky iest sem gryuen da dwa denick) имеется в виду московская гривна, то московский рубль – это 72 денги (7×10+ +2), если новгородская, то 100 денег (7×14+2). Второй вариант совпадает с тем, что пишут неизвестный автор (1 Rubell dat ist 100 nougarsche dening) и Тённи Фенне (рꙋбел мꙋско^{в}ско^{и} = rubel moschoffskoi = 100 deng).

Осталось одно разногласие: у Тённи Фенне новгородский рубль составляет 210, а не 216 денег. Кажется, что проще описаться в одной цифре (0 вместо 6), чем ошибочно добавить три слова (da sest denock), так что правильно, видимо, у Томаса Шрове. Сопоставление с дополнительными источниками показало бы, что это так и есть.

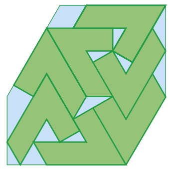
Комментарии. Чтобы не делать задачу слишком сложной, мы исключили упоминание новгородских денег – *копеек* (название – от всадника с копьём, изображённого на лицевой стороне). Новгородская денга равнялась двум московским; счёт 1 копейка = 2 ден(ь)ги сохранился до 1917 года. Вот копейка Ивана Грозного («царь и великий князь Иван всея Руси»; обратите внимание, что на оборотной стороне штемпель неточно попал на заготовку):

А Борис Годунов (годы царствования: 1598–1605), с монетами которого мог встретиться Тённи Фенне, чеканил только копейки. Кстати, Тённи Фенне не разобрался в новгородках (копейках) и московках (денгах) – в его словаре было неправильно написано:

копѣка	kopeka	1 deng
моско^{в}ска	moskoffka	½ deng
полꙋска	poluska	¼ deng

Интересно, что чуть более поздние датские подражания российским копейкам (чеканились с 1619 года) называли *деннингами* (обратите внимание на готический шрифт надписи на оборотной стороне).

СЕМЬ СЕМЁРОК **(«Квантик» № 10, 2021)**



ДВА КРУГА И ОТРЕЗОК
(«Квантик» № 10, 2021)

Будем сдвигать первый круг вдоль рельса, не поворачивая, пока он не коснётся второго круга (рис. 1). Отметим точку касания на каждом из кругов и отодвинем первый круг обратно (рис. 2). Две отмеченные точки и будут концами искомого отрезка! Этот отрезок параллелен рельсу, так как первый круг двигался параллельно рельсу. Отрезка меньшей длины быть не может – иначе круги столкнулись бы при сдвиге на меньшее расстояние.

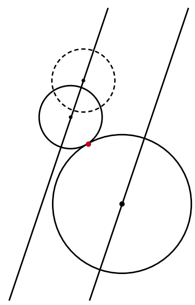


Рис. 1

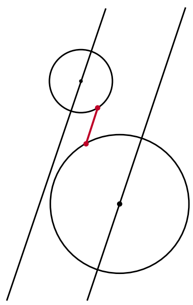


Рис. 2

Чтобы найти отрезок максимальной длины, надо бы провести первый круг «сквозь» второй до момента, когда возникнет их последнее касание (рис. 3) – отметив точку касания на каждом круге и вернув первый круг на место, мы найдём концы наибольшего отрезка. Но деревянные круги так не сдвинешь. Как же быть? Положим на наши круги линейку так, чтобы она соединяла две уже отмеченные точки, и проведём вдоль линейки линию на наших кругах (рис. 4). Она пересечёт круги ещё в двух точках, которые и будут искомыми (подумайте, почему!).

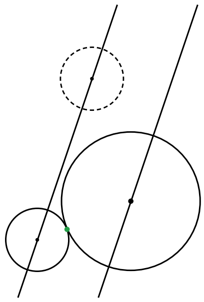


Рис. 3

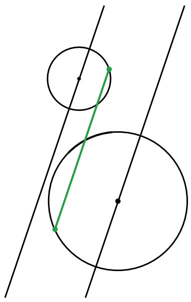


Рис. 4

НА ПЛАНЕТАХ, СПУТНИКАХ И ОРБИТАЛЬНЫХ СТАНЦИЯХ

1. Метеоры — это сгорающие в атмосфере твёрдые тела, падающие на планету, их ещё называют «падающими звёздами». У Меркурия практически нет атмосферы, поэтому наблюдать метеоры на Меркурии не удастся. По этой же причине падающее тело не тормозится о воздух, а с гигантской скоростью ударяется о поверхность, полностью испаряясь, так что на месте падения не остаётся метеоритов.

2. Когда человек плавает, он частично погружён в воду. Выталкивающая сила, действующая на человека, равна весу воды того же объёма, что и погружённая часть. Погрузим одного человека в воду на Земле, а другого точно такого же человека точно так же погрузим в воду на Луне. На Луне выталкивающая сила будет меньше в такое же число раз, во сколько раз там меньше сила тяжести.

Если на Земле человек держится на поверхности, выталкивающая сила и сила тяжести компенсируют друг друга, поэтому и на Луне он будет держаться на поверхности, причём на столько же погрузившись в воду. Если же человек на Земле тонет, то есть сила тяжести больше выталкивающей силы, то и на Луне он будет тонуть, но разница сил уменьшится, и гребками легче будет её преодолеть, то есть плавать будет легче.

В этом решении мы, конечно, предполагали, что вода на Земле и на Луне взята одной и той же плотности. Ведь значительно легче держаться на поверхности воды на Земле в Мёртвом море, чем на Луне в дистиллированной воде.

3. В условиях невесомости свеча быстро погаснет, поскольку отсутствует конвекция воздуха, подводящая кислород к пламени. Однако если на свечу дуть или если она движется, то огонь будет. Это можно наблюдать на видео kvan.tk/space-fire в интернете.

4. Воздух, которым мы обычно дышим, примерно на 80% состоит из азота и на 20% из кислорода. Воздух на станции содержал значительно большую долю кислорода (в нём было 26 % азота и 74 % кислорода), Поэтому его давление удалось сделать меньше, чтобы снизить нагрузку на стенки станции. В результате плотность атмосферы внутри станции была в 3 раза ниже, чем на Земле. Рассчитанный на плотный земной воздух, оперённый дротик не успевал сориентироваться и подлетал к мишени, кувыркаясь.

ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ И СЕТИ ШТЕЙНЕРА

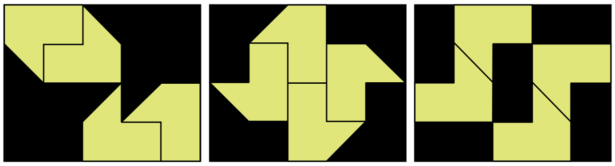
1. Сумма расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника меньше, чем у любой другой точки, поэтому второй такой точки быть не может.

3. Вспомним систему грузов из статьи. Минимум потенциальной энергии достигается в точке, от которой сумма расстояний до вершин минимальна. С другой стороны в положении равновесия сумма сил должна равняться нулю. Если равновесие достигнуто не в вершине треугольника, углы между верёвками будут равны, то есть эти углы будут по 120°. Тогда исходный треугольник разбивается на три треугольника с углами по 120°, у каждого из них остальные углы меньше 60°, откуда у исходного треугольника все углы меньше 120°, что противоречит условию. Значит, равновесие достигается в вершине. Сумма двух сторон наименьшая, если эти стороны прилегают к наибольшему углу (так как против большего угла лежит бóльшая сторона).

4. Рассмотрим два из данных равносторонних треугольников: ABC_1 и ACB_1. Пусть их описанные окружности имеют центры O_C и O_B и вторично пересекаются в точке X. Так как угол A меньше 120°, угол O_CAO_B меньше развёрнутого, откуда точка X лежит на дуге AB окружности ABC_1 (а не на дополнительной дуге AC_1B). Тогда угол AXB равен 120°, как вписанный. Аналогично углы BXC и CXA равны 120°, поэтому X – точка Торричелли.

5. Пусть T – точка Торричелли треугольника ABC. В упражнении 4 показано, что TA, TB и TC – это общие хорды трёх окружностей. Треугольник с вершинами в центрах окружностей образован серединными перпендикулярами к хордам TA, TB, TC. Так как углы между хордами равны, то и углы между перпендикулярами равны, откуда треугольник правильный (сравните с рисунком 8 статьи).

ТРАНСФОРМАЦИИ ПУСТОТЫ



ТАК ЧТО ЖЕ ГОВОРИЛА МАМА?

Мама сказала «... протри óкна ...», а телефон распознал два слова как три, получилось «... про три окнá...».

ПОЗДРАВЛЯЕМ ПОБЕДИТЕЛЕЙ И ПРИЗЁРОВ ТРЕТЬЕГО ЭТАПА НАШЕГО КОНКУРСА 2020/21 УЧЕБНОГО ГОДА!

Победители: Артём Барков, Алёша Бирюлин, Филипп Ганичев, Leonie Krvavych, Елена Куцук, Павло Назаренко, Александра Нестеренко, София Окунева, Иван Подгорнов, Тамара Приходько, Кирилл Ровинский, Лев Салдаев, Севастьян Ушаков, Иван Часовских, Михаил Яриков, команда 5-х классов школы № 44 г. Тулы.

Призёры: Ульяна Ануфриева, Дзерасса Бежаева, Александр Беляков, Павел Бойченко, Элина Бугаева, Андрей Вараксин, Анна Джаошвили, Алиса Елисеева, Арсений Ермолаев, Мария Зеленова, Артём Карпенко, Игорь Ковалев, Владислав Костиков, Мария Плеханова, Павел Прохоров, Тимур Скивко, Алёна Соколова, Зарина Шарипова.

УДАЧИ ВСЕМ В НОВОМ КОНКУРСЕ 2021/22 УЧЕБНОГО ГОДА!

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач III тура, с которыми справитесь, не позднее 5 декабря в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

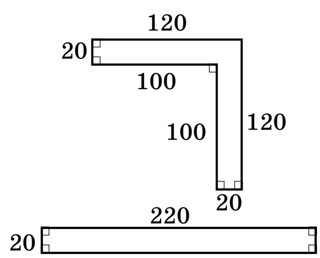
В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

III ТУР

11. Барон Мюнхгаузен утверждает, что записал дробь $\frac{A}{B}$, где A и B – различные натуральные числа, а потом вычеркнул какую-то цифру в числителе и какую-то – в знаменателе так, что получившаяся дробь стала равна дроби $\frac{B}{A}$. Могло ли такое быть?

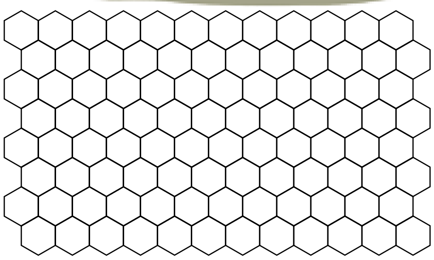
12. Квантик и Ноутик выгуливают своих собак не далее чем в 100 м от своих домов (то есть в таких точках, расстояние от которых до ближайшей точки дома не превышает 100 м). Они живут в домах, формы и размеры которых указаны на рисунке. Дома расположены далеко друг от друга и от других домов, и вокруг них нет ничего, мешающего прогулке. У кого больше площадь территории, на которой он выгуливает свою собаку?



Авторы: Максим Дидин (11), Егор Бакаев (12), Борис Френкин (13), Михаил Евдокимов (14), Илья Сиротовский (15)

13. В таблице 10×10 половина клеток красные, половина – синие. Назовём строку или столбец *чистыми*, если в них все клетки одного цвета. Какое наибольшее суммарное число чистых строк и столбцов может быть в такой таблице и почему?

14. На картинке вы видите часть большой решётки, составленной из шестиугольников, у которых все стороны равны и углы тоже. Все вершины шестиугольников раскрасили, каждую – в чёрный или белый цвет. Докажите, что найдутся три одноцветные вершины, образующие равносторонний треугольник.



15. Петя записывает 9-значные числа. На первое место (самое левое) он пишет любую цифру от 1 до 9, на второе место – от 1 до 8, на третье – от 1 до 7, ..., на девятое (самое правое) – цифру 1. Сколько чисел, делящихся на 7, может получить Петя?

Художник Николай Крутиков

ГРОМ МОЛНИЯ

Расстояние до молнии во время грозы определяют так: увидев молнию, сразу начинают считать секунды – раз, два, три... – до того, как услышат гром. Число секунд делят на три – это и есть расстояние в километрах. На чём основан этот способ?

И ещё вопрос. Почему гром мы слышим намного дольше, чем видим молнию?

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986
21011