№ 10 | октябрь 2021

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 10
октябрь 2021

ПЯТОЕ КОЛЕСО

МУЗЫКАЛЬНЫЙ ЧУДАК

ЧИСЛОВАРНЫЕ РЯДЫ

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 10, октябрь 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Т. А. Корчемкина, Е. А. Котко, Г. А. Мерзон, Н. М. Нетрусова, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов, Н. А. Солодовников
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11.
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: **kvantik@mccme.ru** сайт: **www.kvantik.com**
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
▪ бумажный каталог – Объединённый каталог «Пресса России» (индекс **11346**)
▪ электронная версия Каталога Почты России (индекс **ПМ068**)
Онлайн-подписка на сайте:
▪ агентства АРЗИ **akc.ru/itm/kvantik**
▪ Почты России **podpiska.pochta.ru/press/ПМ068**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 14.09.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40

Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

СОДЕРЖАНИЕ

Михаил Евдокимов

Пятое колесо

Лёва готовился к олимпиаде по математике. «Новые одинаковые покрышки автомобиля „Антилопа Гну”, если их установить на переднюю ось, выходят из строя через 10 000 км, а если их установить на заднюю ось – через 15 000 км, – прочитал он. – Какое наибольшее расстояние может проехать машина на таких покрышках, прежде чем Адаму Козлевичу придётся покупать новые?»

– Кто такой Адам Козлевич? – спросил Лёва.

– Это известный математик, – пошутил папа, который окончил мехмат МГУ. – Не отвлекайся!

– Что-то я не понимаю, в чём задача? Ясно же, что больше 10 000 км не проедешь! – Лёва захлопнул книгу.

– А что если в какой-то момент поменять местами передние и задние покрышки? – подсказал папа.

– Точно! Всё ясно! В среднем получается 12 500 км на колесо, то есть машина проедет 12 500 км, – выпалил Лёва и потянулся за мороженым.

– Такая простая задача на олимпиаде!? – Папа сегодня был очень ироничен.

– Да, как-то подозрительно легко получилось, – задумался Лёва.

– Подскажу, как проверить. Представь, что у тебя много покрышек, и ты заменяешь их по мере необходимости. Можешь указать момент, когда придётся заменить сразу обе пары покрышек?

– Сейчас... – Лёва мысленно ехал на машине и считал покрышки. – Например, через 30 000 км: как раз сотрутся три пары спереди и две – сзади, всего 5.

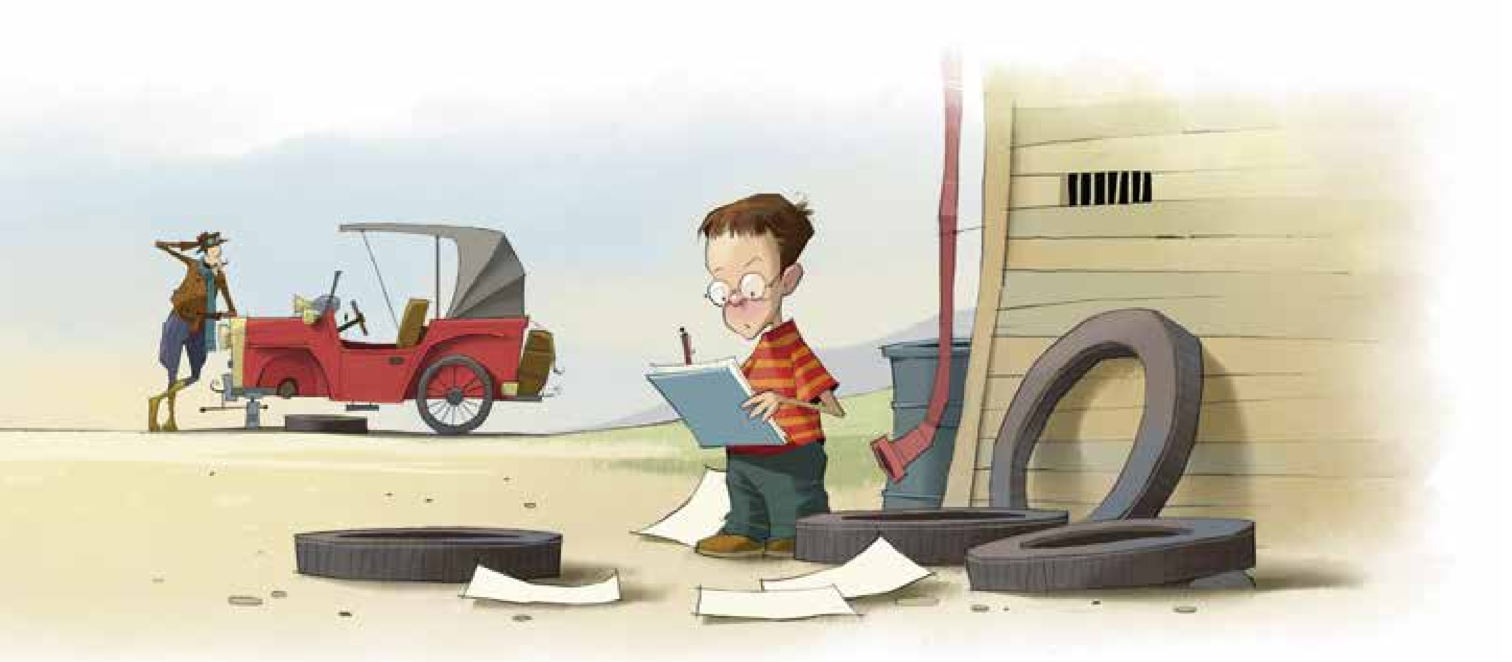
– Отлично! А можно ли проехать более 30 000 км, имея 5 пар покрышек?

– Хм... Я же могу их переставлять... Стоп! Резины на передней оси всё равно ведь сотрётся столько, сколько на трёх парах покрышек. А на задней оси – сколько на двух. Да просто резины не хватит на большее расстояние, как покрышки ни переставляй!

– А какое расстояние удастся проехать тогда на двух парах покрышек?

– Я понял! Резины на пяти парах покрышек хватает максимум на 30 000 км. Значит, двух пар хватит максимум на 2/5 от 30 000, то есть на 12 000 км. Надо же, получилось меньше, чем 12 500.

– Да, но ты пока объяснил, что боль-



ше 12 000 км на двух покрышках не проедешь. А как проехать 12 000 км?

– Надо всю резину истратить... Выходит, покрышки должны стереться одновременно, – размышлял вслух Лёва.

– И когда менять их местами?

– На полпути? Первые 6 000 км проедем без смены, а потом поменяем.

– А почему всё получится?

Лёва почесал затылок и продолжил:

– На половине пути мы как раз половину всей резины сотрём. Правда, на передних покрышках резины на сколько-то больше половины сотрётся, зато на задних – меньше...

– Причём на столько же меньше, – подсказал папа.

– Точно, ведь в сумме стёрлась половина! Но тогда на передних покрышках осталось столько же полезной резины, сколько стёрлось на задних, и наоборот. Если теперь поменять их местами, машина проедет в точности ещё такое же расстояние! Ура, я решил задачу!

– А в общем виде сможешь решить – если передние покрышки стираются через a км, а задние – через b км?

Лёва задумался.

– А как тут расстояние подобрать? Хотя... можно же взять просто ab км! На это расстояние мы истратим b пар покрышек спереди и a – сзади, всего $a+b$, а тогда двух пар... – Лёва почеркал что-то на бумажке и выдал ответ: – ... хватит на $2ab/(a+b)$ км.

– Это число называется *средним гармоническим* чисел a и b, – отметил папа.

– Среднее? Оно что, между a и b всегда? – спросил Лёва. – Ну да, это же расстояние, которое мы проедем! Если, скажем, $a > b$, то b км мы проедем даже не меняя покрышки местами, а на a км просто резины не хватит.

– А ещё для различных положительных a и b оно меньше их среднего арифметического, как в нашем случае!

Лёва был озадачен, а папа продолжал.

– Потом докажешь. А у меня задача-продолжение: что если есть ещё одна запасная покрышка? Ведь так часто бывает. Как изменится ответ? Как нужно менять покрышки и что может помешать достичь максимума на практике?

– Да-а, – вздохнул Лёва, – не видать мне сегодня мороженого...

Помогите Лёве ответить на вопросы.

Художник Алексей Вайнер

Анастасия Челпанова

МУЗЫКАЛЬНЫЙ ЧУДАК

Когда-то он был неуспевающим студентом, затем военнослужащим, потом пианистом в кабаре. Он даже был основателем и единственным представителем придуманной им церкви и несколько лет носил церковное облачение. Но однажды он решил изменить свою жизнь и начал со смены гардероба. Собрав все свои вещи, он скатал их в большой ком, посидел на нём, потоптался, вылил на него всё, что нашёл в доме, продырявил шляпу, порвал галстук и туфли. Избавившись от старой одежды, он в любую погоду стал носить длинный плащ, шляпу-цилиндр, тёмные брюки, широкий галстук и зонт-трость.

Этого оригинального человека звали Эри́к Сати́. Он жил в конце XIX – начале XX века во Франции. Будучи музыкантом и композитором, сам говорил, что он не музыкант и это может подтвердить кто угодно. Он дважды учился в Парижской консерватории и дважды её не закончил. Только в возрасте 39 лет, сменив свой гардероб и изменив уклад жизни, он начал самостоятельно изучать композицию.

Музыка Сати необычна даже для нашего времени, не говоря о его современности. Но ещё более необычны названия его произведений: «Бюрократическая сонатина», «Дряблые прелюдии (для собаки)», «В лошадиной шкуре», «Звуковой плиточный пол», «Железный коврик (для приёма гостей)», «Гимнопедии»... Один цикл своих фортепианных пьес он назвал «Гноссиены», это слово он придумал сам. А его комедия «Ловушка медузы» состоит из семи «Танцев обезьяны».

Однажды знакомый Эрика Сати, известный композитор Клод Дебюсси, сказал, что его музыка не имеет музыкальной формы. В ответ остроумный Сати написал произведение «Три пьесы в форме груши».

Вся жизнь композитора была наполнена юмором, сатирой и насмешками, но она была вовсе не простой. Он постоянно нуждался в деньгах. Прожив какое-то время в центре Парижа, переехал в пригород и каждый день ходил пешком в Париж и обратно, нося с собой в кармане блокнот для записи нот и... молоток. Композитор брал его как оружие, поскольку часто ходил ночью через опасные районы города, где было много хулиганов и преступников.

Некоторые сочинения автора имеют необычную судьбу. Своё сочинение «Раздражения» (иногда название переводят как «Досады» или «Томление духа») автор записал очень коротко, на трёх нотных строчках, но указал, что его нужно повторить 840 раз! Несмотря на это, произведение всё же исполнялось, правда, уже после смерти автора. Первое исполнение состоялось в 1963 году в Нью-Йорке, его организовал американский композитор Джон Кейдж. Участвовали десять пианистов, по очереди принимая друг у друга «эстафету». Каждый играл час-полтора. В начале и в конце играл организатор мероприятия Кейдж. Концерт начался в 18:00, шёл всю ночь и закончился только на следующий день, примерно в час дня. Весьма остроумно была организована плата за вход. Билет стоил 5 долларов, но после третьего часа всем посетителям обещали вернуть по 5 центов за каждые последующие 20 минут, проведённые в зале. А тем, кто сможет досидеть до конца, обещали выдать дополнительные 20 центов. Известно только об одном человеке, который сумел вытерпеть весь концерт, даже сохранилось его имя – его звали Карл Шенцер.

Ещё одно исполнение «Раздражений» организовала группа немецких и австрийских учёных. В 2003 году сотрудники Ганноверского университета музыки и драматургии и Австрийского института искусственного интеллекта в Вене опубликовали работу об активности коры головного мозга пианиста, играющего 28 часов подряд! Перед началом эксперимента выносливому пианисту Армину Фуксу закрепили на голове электроды, чтобы следить за активностью его мозга при помощи электроэнцефалографа (ЭЭГ). Исследователи обнаружили, что за время исполнения пианист был в состояниях бодрствования, дремоты и транса, что сказывалось на изменениях темпа, громкости и общей разборчивости музыки.

Необычным для своего времени стало изобретение Эриком Сати «меблировочной музыки». По задумке композитора, она должна была звучать как фон, создавая настроение, подобно обоям или элементам интерьера. Однако эта музыка не имела большого успеха.

Сохранились воспоминания об исполнении одного такого «меблировочного произведения» в антракте концерта. Для создания ощущения, что музыка звучит со всех сторон, музыкантов разместили в разных частях зала. В программках написали специальное предупреждение, чтобы публика не уделяла особенного внимания музыкальным звукам в антракте. И вот, в перерыве, зрители встали со своих мест и начали переговариваться, но, как только послышалась музыка, устремились обратно к своим местам и стали слушать. Напрасно Эрик Сати кричал, чтобы люди гуляли, разговаривали и не слушали! Они слушали, и он был очень расстроен.

Чтобы понять музыку Эрика Сати и его странное поведение, надо поближе познакомиться с искусством его времени. В XIX веке большинство европейских музыкантов, художников, скульпторов, писателей увлекалось идеями романтизма. Они придумывали ярких героев и показывали их борьбу с несправедливостью. Герой-романтик был смелым, эмоциональным и непременно одиноким.

В конце XIX – начале XX века зарождается новое направление: импрессионизм. Объектом искусства становится уже не герой, а изменчивость окружающего мира. Художники и композиторы стараются изобразить мир в движении, запечатлеть мимолётные эмоции, зыбкость и хрупкость красоты. В это время как раз и жил Эрик Сати.

Наблюдая за развитием нового направления, он решил переосмыслить роль искусства в современном ему мире. Воспевание романтического героя не привлекало его. Он сам сделался героем, ещё при жизни приобретя репутацию язвительного чудака. Роль же музыки он видел в передаче идеи, а не эмоций. Так, желая воплотить в музыке мысль, свободную от чувств, он написал произведение «Сократ», взяв в качестве текста фрагменты диалогов Платона. Работая с певицами-исполнительницами этого произведения, автор просил «избегать какого-либо выражения».

Не беспокоясь, что его произведения будут скучными, он говорил: «Публика уважает Скуку. Для неё Скука – таинственна и глубока. Курьёзная вещь: против Скуки аудитория беззащитна. Скука приручает её, делает кроткой и послушной. Почему же людям гораздо легче скучать, чем улыбаться?».

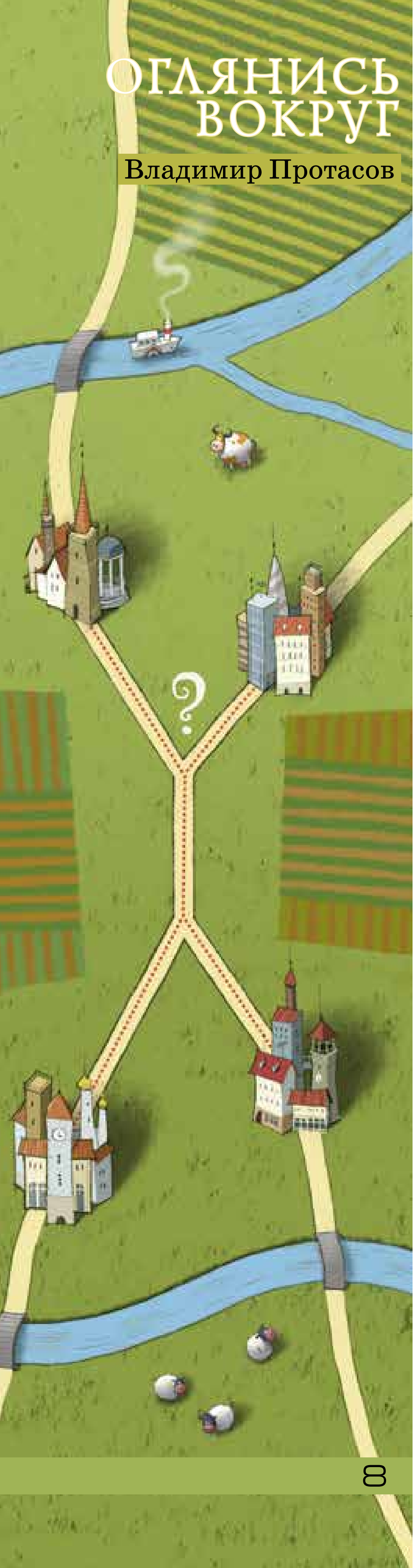
Особенность большинства произведений Сати в том, что, придумав музыкальные фрагменты, он просто пристыковывал их друг к другу. Получалось, что он не столько сочинял, сколько конструировал произведение. В его музыке, как правило, много повторов, нет музыкального развития, нет кульминации. Музыка Сати не виртуозна и не изобилует сложными пассажами и украшениями, она бесстрастна, однообразна и достаточно проста.

Он хотел заставить людей слушать (или не слушать) музыку в чистом виде, без настройки на её содержание. Чтобы избежать подсказок, он специально придумывал неуместные названия. В то время как композиторы-импрессионисты называли свои сочинения «Послеполуденный отдых фавна», «Лунный свет» (К. Дебюсси), «Игра воды», «Отражения» (М. Равель), он упорно писал в заголовках: «Танцы навыворот», «Мечтающая рыба», «Прелюд в виде коврика», «Приятная безнадёжность» и т.д.

Он не боялся парадоксов, он создавал их. Например, несколько сочинений Сати продолжаются всего несколько секунд каждое. А в балете «Парад», помимо музыки оркестра, используются звуки пишущей машинки и звон бутылок, причём один из номеров (танец лошади) и вовсе исполняется без музыки. Нестыковки и неожиданности помогали ему создать не самостоятельную, но фоновую музыку для жизни, общения и размышления.

Несмотря на подобные чудачества, Эрик Сати оказал огромное влияние на развитие музыки. Его музыкальные приёмы использовали композиторы И. Стравинский, К. Дебюсси, М. Равель, Ф. Пуленк и др. Именно он стоял у истоков новых музыкальных направлений: неоклассицизма, авангарда, минимализма, электронной музыки, киномузыки… Сегодня никого не удивишь музыкой в метро или в магазине, музыку к фильмам пишут профессиональные композиторы. Многократное повторение одних и тех же аккордов послужило основой для джаза, популярной и электронной музыки. А музыкальные миниатюры для рекламы стали самостоятельным жанром.

Художник Мария Усеинова



ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ И СЕТИ ШТЕЙНЕРА

Владимир Протасов

Это случилось много лет назад. Я вёл математический кружок для школьников и дал такую задачу:

Задача 1. Четыре города расположены в вершинах квадрата со стороной 100 км. Жители хотят соединить их дорогами так, чтобы из каждого города можно было проехать в любой другой. Они собрали деньги на 280 км дороги. Хватит ли этого?

Между двумя городами можно проехать не обязательно напрямую, а через другие города. Также можно ставить перекрёстки, на которых будут сходиться несколько дорог.

Первое, что приходит в голову, – провести две диагонали с перекрёстком в центре (рис. 1, *а*). Общая длина дорог будет больше 282 км (для тех, кто проходил квадратные корни: длина равна $2 \cdot 100\sqrt{2} = 282{,}84\ldots$), это нас не устраивает. Если соединить дорогами три вершины квадрата буквой П (рис. 1, *б*), то общая длина будет 300 км. Ещё хуже. Получается – нельзя? Можно! Экспериментально, вооружившись линейками, школьники строили системы дорог, меньшие 280 км. Например такую, с двумя перекрёстками (рис. 1, *в*).

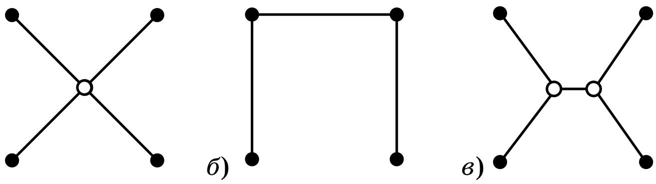


Рис. 1 *а*) *б*) *в*)

А какая система дорог будет самой короткой? И как её построить? Задача кажется сложной. Тем не менее, мы её решим, и не только для вершин квадрата, но и для любого числа городов.

Задача 2. На плоскости дано несколько точек («городов»). Как связать их самой короткой системой дорог?

Кратчайшая система дорог называется *сетью Штейнера* заданных городов, в честь выдающегося геометра Якоба Штейнера (1796 – 1863). В местности с плоским рельефом, например в степи, многие дороги и линии электропередачи проектируются в виде сетей Штейнера. По сетям Штейнера строятся газопроводы в Западной Сибири и в Канаде. Аналоги сетей Штейнера возникают в молекулярной биологии при исследовании происхождения видов. Наконец, сети Штейнера используются при разработке микросхем и компьютерных процессоров: уменьшить длину проводника электрического заряда – значит ускорить работу компьютера.

Мы будем называть точки городами, отрезки между ними – дорогами. Можно ставить дополнительные точки (перекрёстки), где сходятся несколько дорог.

Если городов только два, то тут и решать нечего – отрезок между ними и будет сетью Штейнера. Но уже для трёх городов задача куда сложнее. Она уведёт нас в далёкий XVII век, в эпоху великих открытий и великих имён.

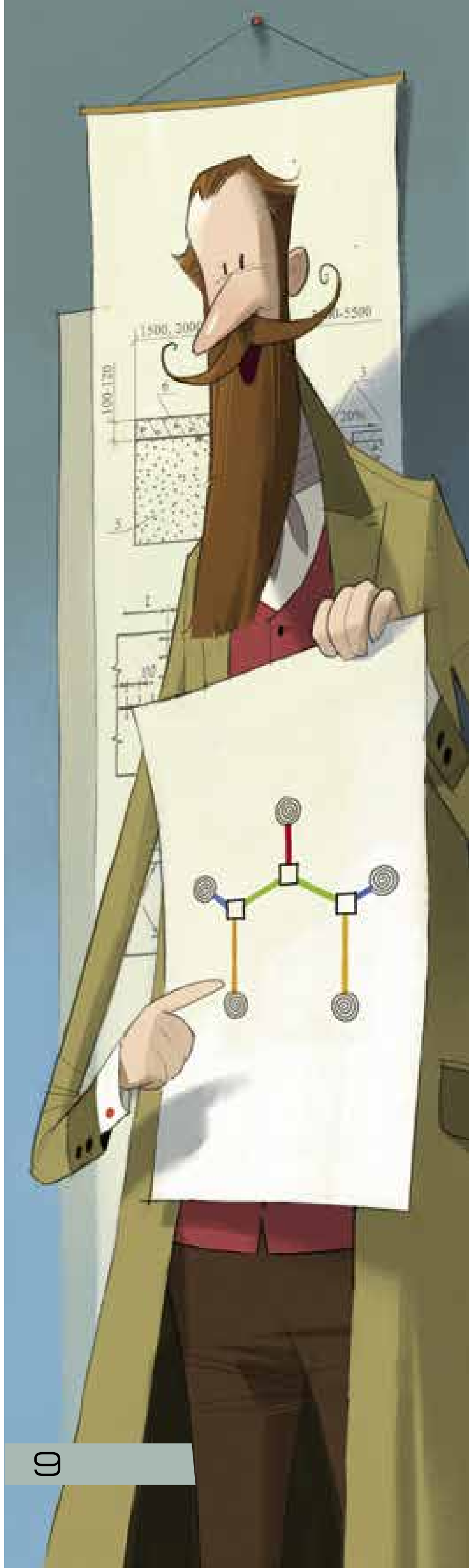
Задача 3. Дан треугольник. Найти точку, сумма расстояний от которой до вершин наименьшая.

Решение задачи 3 ещё не гарантирует нахождения сети Штейнера для трёх точек. Конечно, естественно ожидать, что самая короткая система дорог будет иметь один перекрёсток, из которого исходят отрезки к трём вершинам треугольника. Но ведь для квадрата такое же «естественное» решение оказалось неверным. Поэтому не будем торопиться с выводами.

Какая же точка может дать решение задачи 3? Центр описанной окружности? Нет. В центре описанной окружности остроугольного треугольника достигается минимум наибольшего расстояния до вершин, но никак не суммы расстояний. Точка пересечения медиан? Снова нет. Оказывается, в этой точке достигается минимум суммы квадратов расстояний. Вообще, среди четырёх замечательных точек треугольника ответ искать не стоит. Его даёт другая точка – точка Торричелли.

ТОЧКА ТОРРИЧЕЛЛИ

История задачи 3 насчитывает более трёх с половиной столетий. В 1659 году она была помещена в книге итальянского физика и механика Винченцо Вивиани (1622–1703) «О максимальных и минимальных значениях». Он был учеником великого Галилея, а нам он более известен как изобретатель ртутного барометра – прибора для измерения



атмосферного давления. Своё сочинение Вивиани, по традициям того времени, снабдил длинным названием: «Пятая книга сочинений Аполлония Пергского о конических сечениях, заключает в себе первые исследования о наибольших и наименьших величинах и признаётся самым замечательным памятником этого великого геометра». В этой книге приведено много задач на максимум и минимум, в том числе наша задача 3. Ещё раньше этой задачей интересовался Бонавентура Кавальери (1598–1647), один из авторов интегрального исчисления. Ею также занимался величайший французский математик Пьер Ферма (1601–1665). Но первое решение, по-видимому, не позднее 1640 года, было получено Эванджелистой Торричелли (1608–1647), ещё одним учеником Галилея. Именно ему и Вивиани уже ослепший Галилей в конце жизни диктовал главы из своих «Бесед о механике». Подобно многим учёным позднего Возрождения, Торричелли был разносторонним человеком. Будучи профессором математики Флорентийского университета, он занимался задачами физики, механики, баллистики и оптики и даже писал работы по конструированию оптических приборов и шлифовке линз. Именно он открыл закон о давлении жидкости, который теперь проходят в школе.

Торричелли сформулировал правильный ответ к задаче 3, но его доказательство нам неизвестно. Скорее всего, решение было основано на физических соображениях. Мы же решим эту задачу геометрически, а для этого попутешествуем во времени: начнём с одного факта, доказанного через два века после Торричелли.

Теорема 1. *Дан треугольник ABC, в котором* $\angle C = 120°$ (рис. 2). *На его стороне AB во внешнюю сторону построен равносторонний треугольник ABD. Тогда длина отрезка CD равна сумме сторон AC и BC, а прямая CD – биссектриса угла C.*

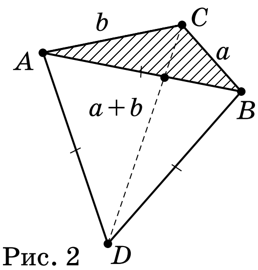


Рис. 2

Эту теорему опубликовал в 1936 году румынский математик Димитрие Помпею. Правда, доказал он её довольно сложно, с помощью комплексных чисел. А зря. Всё можно сделать геометрически, и мы в этом сейчас убедимся.

Доказательство. Построим ещё один равносторонний треугольник, теперь на стороне AC. Назовём его ACE (рис. 3). Рассмотрим треугольник ACD. Если повернуть его на 60° вокруг точки A против часовой стрелки, то он перейдёт в треугольник AEB. В самом деле: такой поворот переведёт отрезок AD в AB, а отрезок AC в AE. Значит, сторона CD перейдёт в сторону EB, стало быть, эти стороны равны. Но отрезки EC и CB лежат на одной прямой (потому что $\angle ACE = 60^\circ$, а $\angle ACB = 120^\circ$) и, таким образом, сумма сторон AC и BC равна EB, а значит, равна CD.

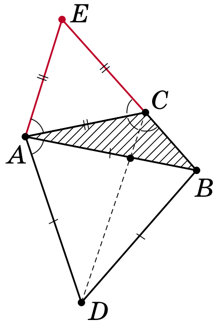


Рис. 3

Наконец, раз поворот на 60° переводит CD в EB, угол между этими прямыми равен 60°, а значит, $\angle BCD = 60^\circ$, то есть CD – биссектриса угла ACB.

А что будет, если угол C не равен 120°?

В этом случае отрезки EC и CB не будут лежать на одной прямой. И по неравенству треугольника, их сумма будет больше, чем EB. Но поскольку $EB = CD$, мы получаем, что сумма $AC + CB$ больше, чем CD. Мы доказали такое дополнение к теореме 1:

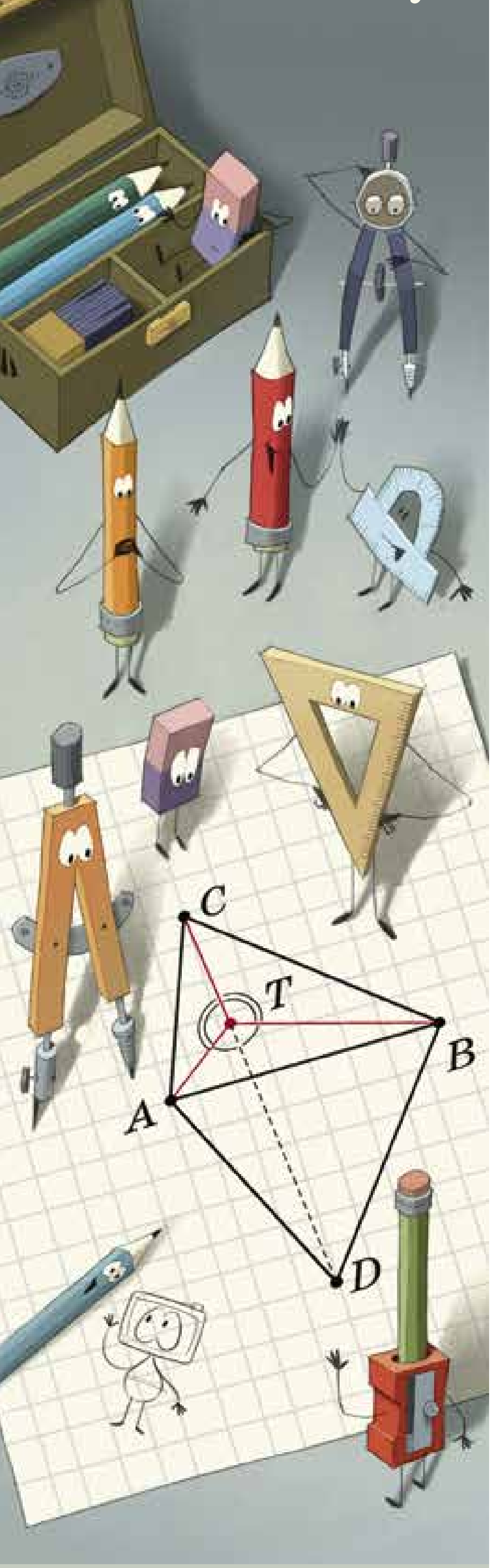
Теорема 2. *Если в условиях теоремы* 1 *угол* C *не равен* 120°, *то длина* CD *меньше суммы сторон* AC *и* BC.

Вот теперь пришла очередь определить ту замечательную точку, которая даёт решение задачи 3:

Точкой Торричелли треугольника называется точка, из которой три луча, направленные в вершины треугольника, образуют между собой углы в 120°.

Понятно, что точка Торричелли, если она есть, лежит внутри треугольника. У точки Торричелли много интересных свойств. Но главное, конечно, – наименьшая сумма расстояний до вершин.

Теорема 3. *Если у треугольника есть точка Торричелли, то для неё сумма расстояний до вершин наименьшая.*



Доказательство. Обозначим наш треугольник через ABC, а его точку Торричелли – через T. Построим на стороне AB во внешнюю сторону равносторонний треугольник ABD (рис. 4, *а*). Так как $\angle ATB = 120°$, можно применить теорему 1: сумма $TA + TB$ равна TD. По той же теореме 1, TD – биссектриса угла ATB. Поэтому угол ATD равен 60°, а значит, отрезки TC и TD лежат на одной прямой. Следовательно, CD равно $TC + TD$, а значит, равно $TA + TB + TC$. Ну а если взять любую другую точку на плоскости? Назовём её M (рис. 4, б). Для неё хотя бы один из трёх углов между отрезками, идущими к вершинам треугольника, не равен 120°. Пусть, например, $\angle AMB \neq 120°$. Тогда применяем теорему 2: сумма $MA + MB$ будет больше MD. А сумма $MD + MC$ не меньше CD. Поэтому $MA + MB + MC$ больше CD, то есть сумма расстояний от M до вершин треугольника больше, чем для точки Торричелли.

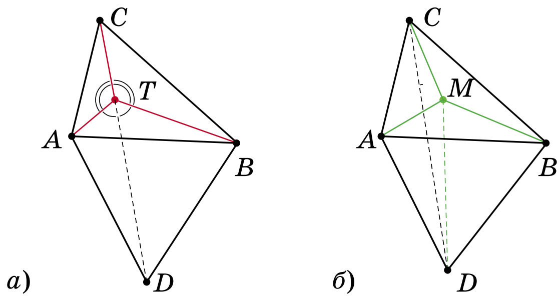


Рис. 4

К сожалению, не у каждого треугольника есть точка Торричелли. Например, её нет у треугольника, один из углов которого 120° или больше. Почему? Пусть, например, $\angle ACB \geqslant 120°$. Для любой точки T внутри треугольника угол ATB больше угла ACB (докажите это!), а значит, больше 120°. Поэтому никакой точки Торричелли внутри него быть не может.

Ну, а если все углы треугольника меньше 120°? Оказывается, что тогда точка Торричелли обязательно существует, причём ровно одна.

Теорема 4. *Если у треугольника все углы меньше 120°, то у него есть точка Торричелли.*

Доказательство. Построим на сторонах нашего треугольника равносторонние треугольники, как показано на рисунке 5. Если сделать поворот вокруг вершины C на 60°, то треугольник CEB перейдёт в треугольник CAF. При этом сторона EB повернётся на 60° и перейдёт в AF. Значит, угол AME между EB и AF равен 60°. Смежный к нему угол AMB равен 120°. Точно так же – отрезок DC пересекает отрезок AF под углом 60°. А теперь применим теорему 1 и получим, что MD – биссектриса угла AMB и поэтому она также пересекает отрезок AF под углом 60°. Итак, прямые DM и DC пересекают прямую AF под равными углами, значит, они совпадают. Получается, что отрезки AF, BE и CD пересекаются в одной точке M и образуют друг с другом равные углы по 60°. Таким образом, M – точка Торричелли.

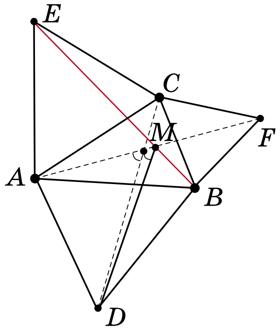


Рис. 5

Из нашего доказательства следует способ построения точки Торричелли. Надо построить во внешнюю сторону равносторонние треугольники и провести отрезки AF, BE и CD. Они пересекаются в одной точке, и это – точка Торричелли (рис. 6). Более того, эти три отрезка ещё и равны по длине, которая и есть сумма расстояний от точки Торричелли до вершин треугольника.

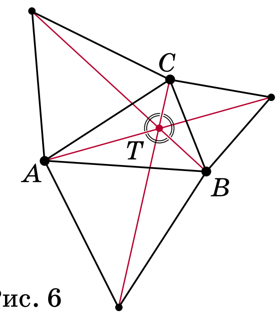


Рис. 6

Если у треугольника есть угол 120° или больше, то точки Торричелли у него нет. А где же тогда достигается наименьшая сумма расстояний до вершин? Ответ: в вершине наибольшего угла (того самого, который не меньше 120°). Вы сами сможете легко это доказать, но только после того, как прочитаете вторую часть статьи в следующем номере.

Продолжение следует.

Художник Алексей Вайнер

Ольга Кузнецова

Числоварные ряды

Единорог, *двузуб*, *трицератопс*, *четырёхглазка*, *пятиног* – сможете продолжить ряд?

Как видите, его составляют животные (реальные и выдуманные), которые названы в числовой последовательности. Многие живые организмы носят названия, связанные с количеством у них ног, глаз или рогов, и этот принцип используется в разных языках. Похожие «числоварные» ряды легко составляются из названий правильных многогранников или многоугольников. Месяцы с сентября по декабрь тоже названы по латинскому счёту: от 7 до 10. Стихотворные метры иногда называют по числу частей в строке – например, в гекзаметре 6 стоп (греч. *гекс* – «шесть»). Так что темы для таких рядов можно придумывать самые разные, а числовые корни брать не только русские, но и заимствованные. Вот как может выглядеть числоварный ряд средств передвижения: *моноцикл* (греч. *монос* – «один»), *биплан* (лат. *би-* – «двух-») или *двуколка* (др.-рус. *коло* – «колесо»), *тройка*, *квадрокоптер* (лат. *куадри-* – «четырёх-»). Попробуйте сами составить числоварные ряды на определённую тему: фантастические предметы и сказочные герои, музыкальные термины и пр.

Играть с числовыми корнями можно и по-другому. Например, подбирать группы слов, связанные с определённым числом. Как связаны *тетрис*, *тетрадь* и *тетрапод*? *Тетрапод* – дословно *четвероног*, так называют и четвероногое животное, и бетонный блок с 4 ножками. *Тетрис* – игра на основе тетрамино: в каждой фигурке 4 квадратика. А с тетрадью всё немного сложнее, хотя она тоже от греческой четвёрки. Формат ученической тетради составляет четверть большого листа, отсюда и название. Примерно так же образовано слово *фолиант* (лат. *фолиум* – «лист»), по современным меркам это огромный том. Историки и филологи, которые работают со старинными книгами разного размера, до сих пор используют термины латинского происхождения: *ин-кварто* – формат в четвертушку большого листа (называемого *ин-плано*), *ин-октаво* – в восьмую часть, а *ин-фолио*, что интересно, – в половину.

Несколько иностранных корней, попавших в русский язык, связано с удвоением. Про латинское *би-* мы уже сказали: недаром зрители кричат «бис», прося артиста повторить выступление. Но есть ещё греческое *ди-*. В школе нас учат отличать *дипломанта* (участник, отмеченный на конкурсе) от *дипломата* (человек и чемодан). Эти слова похожи и путаются из-за общего происхождения от слова *диплом* – изначально «сложенный вдвое документ». Тот же корень есть в названии динозавра *диплодок* – он приходится дальним родственником всем дипломатам и дипломантам благодаря двойным отросткам на костях позвонков.

Но не всё в языке точно, как в математике. Бывает, что вполне конкретное число в названии указывает на условное количество чего-либо. У *сороконожек* (они же *многоножки*) может быть и несколько десятков, и несколько сотен ног. Сказочные *семимильные сапоги* позволяют шагать на очень большие расстояния, однако вряд ли скороходы измеряли эти самые мили. Растение *тысячелистник* называется не по количеству листьев, а от того, что листья разделены на множество сегментов. Алоэ называют *столетником*, причём это народное название объясняют по-разному: одни говорят, что растение очень редко цветёт, раз в сто лет, другие верят в его лечебные свойства, благодаря которым можно прожить едва ли не целый век. *Сто* и *тысяча* – очень общие слова. Наверняка вы уже ловили ваших собеседников на преувеличении, если слышали в свой адрес что-нибудь вроде: *Сто раз уже об этом говорили!* Мы часто используем большие и красивые числа в переносном смысле, чтобы показать немалое количество, выразить высокую степень чего-либо – как, например, во фразеологизме *воздать сторицей*, то есть отблагодарить в стократном размере. Можете придумать свои примеры переносного использования чисел?

Напоследок несколько шуточных числоварных загадок.

1. У какого животного отличный нос?

2. В музыкальном есть *тройка*, а в земноводном – только кажется.

3. Что лишнее в этом числоварном ряду: *монокль*, *бинокль*, *спектакль*, *пентакль*?

Художник Елена Цветаева

Михаил Гельфанд

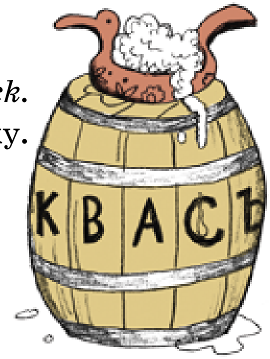
КУПЦЫ И СЛОВАРИ

В XVI веке германские купцы, торговавшие в России, составляли словари, куда включали и сведения о денежных единицах. При этом они не всегда были точны, к тому же русские слова они воспринимали на слух, воспроизводили их не всегда последовательно, а по-немецки говорили на разных диалектах.

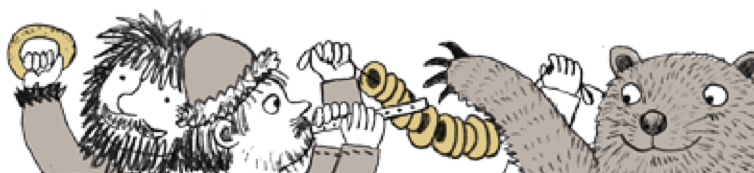
Ниже приведены отрывки из нескольких таких словарей.[1] Можно ли однозначно восстановить соотношения между денежными единицами? Как вы думаете, чем можно объяснить расхождения? (Если вы учили немецкий язык, вам будет немного проще это сделать, но можно обойтись и без знания немецкого.)

Томас Шрове, «Русская книга» (Thomas Schroue, «Einn Russisch Buch»), 1546 г.:

Rubell nougrotzkoye jest petnaset gryuen da sest denock.
Ein Rubell nougr. ist fuftein marck und 6 *deneck.*
Poltyna nougrotsky iest sem gryuen da deset denyck.
Ein Poltin nougr. ist sieben marck undo 10 *denik.*
Rubell moskausky iest sem gryuen da dwa denick.
Ein Rubell muskowitisch ist sieben marck und zwei denick.
Poltina muskausky iest polsetforty gryuen da odna dencky.
Ein Poltin muskowitisch ist 3½ *marck und ein denick.*
Grywna nowgorocky iest satyrnatseth denyck.
Ein marck naug. ist 14 *denyck.*
Grywna muskausky iest dedsedt denycky.
Ein marck muskousky ist 10 *denycky.*



[1] Первые два отрывка цитируются по книге С. Строева «Описание памятников славяно-русской литературы, хранящихся в публичных библиотеках Германии и Франции» (Москва, 1841), третий – по электронному изданию «Tönnies Fenne’s Low German Manual of Spoken Russian».

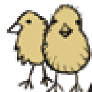


Неизвестный автор, «Русская книга» («Ein Rusth Boeck»), около 1550 г.:

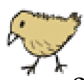
Odin Rubell, 1 Rubell dat ist 100 nougarsche dening.
Grywna nowgorotska, Nouratsche mark ist 14 dening.
Grywna moskowska, Muschkawitsch mark ist 10 dening.
Poltyna 50 denningen, ist ½ Rubell.

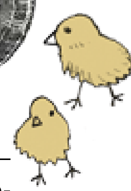
Тённи Фенне (Tönnies Fenne), Словарь разговорного русского языка, 1607 г.:

рꙋбел новагра^{т}ско^{и}	rubel nouagratschoi	210 denning
рꙋбел мꙋско^{в}ско^{и}	rubel moschoffskoi	100 deng
griве^{н} новагра^{т}ско^{и}	griuen nouagratschoi	14 deng
griве^{н} моско^{в}ско^{и}	griuen muschoffschoi	10 deng
полтина	poltina	50 deng



ИЗОБРАЖЕНИЯ НЕКОТОРЫХ МОНЕТ (не в масштабе)



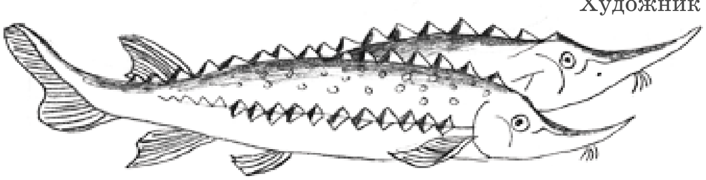


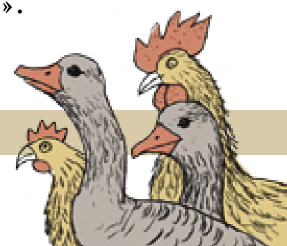
1. Денга Ивана Грозного до венчания на царство (1547 г.). На лицевой стороне – всадник с саблей, на оборотной – надпись «князь великий Иван» (KNSЬ BEЛIKI IBAN).

2. Денга Ивана Грозного после венчания на царство: добавилось слово «царь» (ЦРЬ)

3. Ещё чеканились *полушки* – половинки денги с изображением двуглавого орла и надписью «государь».

Художник Артём Костюкевич





Татьяна Сабурова

ТРИ ЛЕММЫ О ПЛОЩАДЯХ

Слышали вы что-нибудь о «рельсах Евклида», о перекашивании треугольников, знакомы ли с особенностями укладки линолеума? Предлагаю совершить небольшое путешествие, прокатиться по рельсам, понаблюдать за треугольниками и познакомиться с тремя несложными леммами о площадях.

Представим, что точки A и B закреплены на прямой l, а точка C свободно движется по прямой m (рис. 1). Две параллельные прямые l и m будем называть «рельсами Евклида».

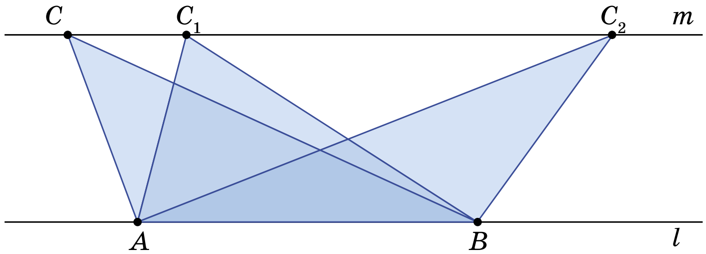


Рис. 1

Все треугольники ABC, ABC_1, ABC_2 равновелики (имеют одинаковые площади), ведь они получаются друг из друга с помощью перекашивания. Представьте, что треугольник сложили из тонких горизонтальных дощечек. При перекашивании дощечки просто сдвигаются друг относительно друга, поэтому площадь не меняется.[1]

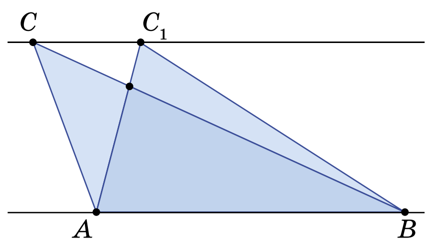


Рис. 2

Посмотрим на равновеликие треугольники ABC и ABC_1 (рис. 2). Пусть O – точка пересечения AC_1 и BC. Уберём общую часть – треугольник AOB, тогда оставшиеся треугольники AOC и BOC_1 тоже равновелики (рис. 3). Получилась красивая

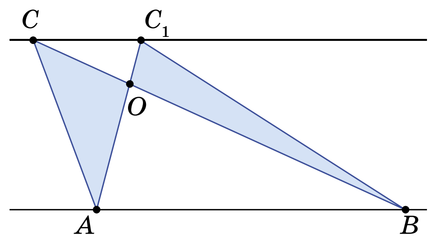


Рис. 3

Лемма 1 («о крыльях бабочки»). *Пусть две диагонали трапеции разбивают её на четыре треугольни-*

[1] Подробнее об этом читайте в статье Г. Мерзона «Площади и перекашивания» в «Квантике» № 2 за 2020 год.

ка. Площади двух из них, примыкающих к боковым сторонам, равны.

Теперь закрепим точку C на прямой m и позволим отрезку AB скользить по прямой l (то есть длина отрезка AB не меняется, рис. 4). Все полученные треугольники ABC, A_1B_1C, A_2B_2C равновелики (ведь это те же треугольники, что на рисунке 1, только сдвинутые).

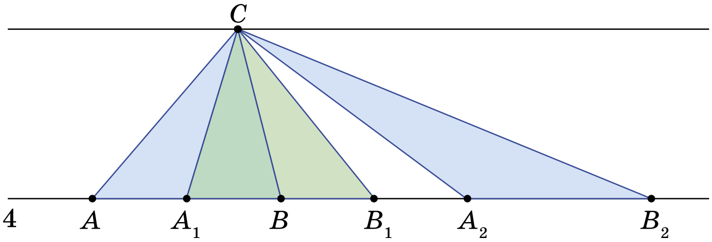


Рис. 4

Рассмотрим один интересный случай. Передвинем отрезок AB так, что A_1 совпадёт с точкой B (рис. 5). Заметим, что CB – медиана треугольника AB_1C. Получилось полезное утверждение:

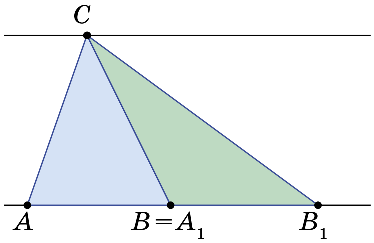


Рис. 5

Лемма 2. *Медиана делит треугольник на два равновеликих.*

Оказывается, с помощью этих двух лемм можно решить много интересных задач.

Легко разделить треугольник одной прямой на две равновеликие части, если прямая проходит через вершину треугольника или середину стороны. А если нет?

Задача 1. Возьмём точку K на стороне треугольника AB, отличную от её середины M (рис. 6). Проведите прямую KN, делящую треугольник на две равновеликие части.

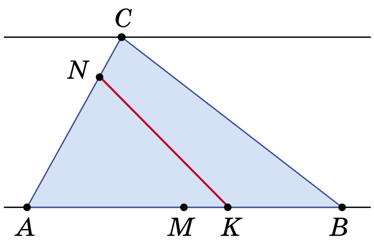


Рис. 6

Решение. Предположим, нам удалось провести такую прямую, тогда площадь треугольника ANK равна половине площади треугольника ABC.

Проведём медиану CM, она тоже поделит треугольник на две равновеликие части (рис. 7).

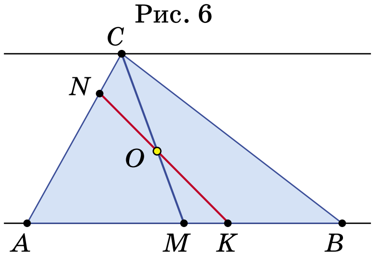


Рис. 7

Площади треугольников ANK и ACM равны. У этих фигур есть общая часть – четырёхугольник $ANOM$, поэтому треугольники CON и MOK равновелики.

Присмотритесь: они напоминают «крылья бабочки» (рис. 8). Значит, мы добьёмся требуемого, если сделаем отрезки CK и MN параллельными (рис. 9)!

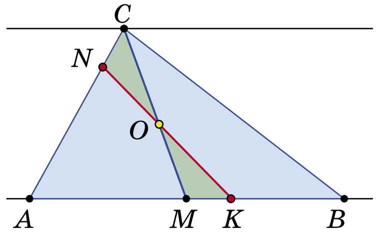


Рис. 8

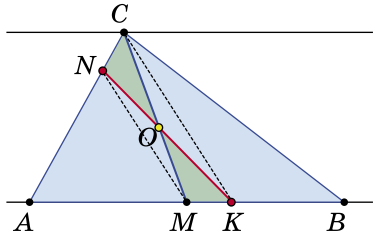


Рис. 9

Для построения искомой прямой сначала построим отрезок CK, затем через точку M проведём прямую, параллельную CK, она пересечёт AC в некоторой точке N. Соединив точки N и K, получим искомую прямую (рис. 10).

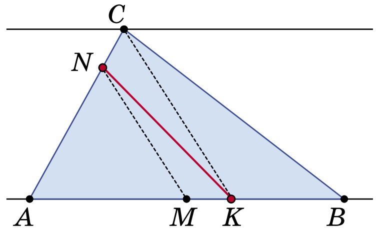


Рис. 10

Задача 2. Дан произвольный выпуклый четырёхугольник $ABCD$. Проведите через одну из вершин прямую, делящую его на две равновеликие части.

Решение. Отметим середину M диагонали BD. По лемме 2, ломаная AMC делит четырёхугольник $ABCD$ на две равновеликие части (рис. 11). Проведём через точку M прямую, параллельную AC, пусть она пересекает сторону AD в точке K. Тогда прямая CK – искомая, поскольку

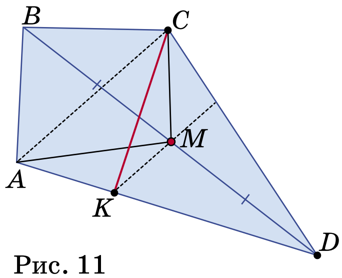


Рис. 11

$$\frac{1}{2}S_{ABCD}=S_{ABCM}=S_{ABC}+S_{AMC}=S_{ABC}+S_{ACK}=S_{ABCK}.$$

Упражнение. Попробуйте разделить на три равновеликие части: а) параллелограмм; б) произвольный четырёхугольник.[2]

[2] Много других интересных задач можно прочитать в брошюре Б. П. Гейдмана «Площади многоугольников» (М.: МЦНМО, 2019).

Задача 3. На стороне треугольника во внешнюю сторону построен полукруг (рис. 12). Одним прямолинейным разрезом разделите эту фигуру на две равновеликие части.

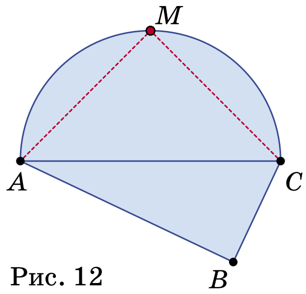


Рис. 12

Решение. Рассмотрим точку M – середину полуокружности, соединим её с концами диаметра A и C. Получившиеся сегменты равны. Осталось через вершину M провести прямую, делящую четырёхугольник $AMCB$ на две равновеликие части.

Задача 4. В комнате прямоугольной формы размером 4×6 решили заменить линолеум (рис. 13), но строители случайно сдвинули два куска (как на рисунке 14 или 15). Что больше: площадь части пола, покрытой дважды, или не покрытой ни разу?

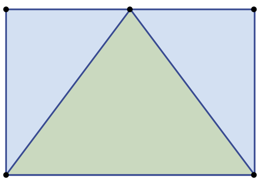


Рис. 13

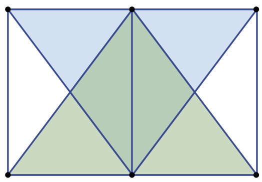


Рис. 14

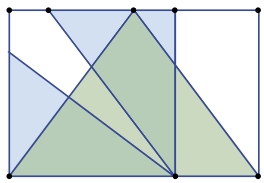


Рис. 15

Решение. Площадь комнаты равна сумме площадей двух синих и одного зелёного треугольников на рисунке 13. С другой стороны, когда синие треугольники сдвинули, покрытая часть пола уменьшилась на величину площади пола, покрытого дважды. Значит, площадь части пола, покрытой дважды, равна площади части, не покрытой ни разу.

Фактически так же доказывается

Лемма 3 («о линолеуме»). *Несколько кусков линолеума лежат на полу комнаты. При этом каждая точка пола покрыта линолеумом не более чем в два слоя. Площадь пола, покрытая дважды, равна площади, не покрытой ни разу, тогда и только тогда, когда общая площадь линолеума равна площади комнаты.*

Задача 5. Точка A_1 – середина стороны BC треугольника ABC, а точки B_1, B_2 и B_3 делят сторону AC на четыре равных отрезка. Докажите, что площадь синей области равна площади зелёной.

Решение. Заметим (рис. 16), что AA_1 – медиана ΔABC, откуда $S_{ACA_1}=\frac{1}{2}S_{ABC}$. Кроме того, BB_2 – медиана ΔABC, а BB_1 и BB_3 – медианы ΔABB_2 и ΔB_2BC соответственно, откуда $S_{ABB_1}=S_{B_2BB_3}=\frac{1}{4}S_{ABC}$.

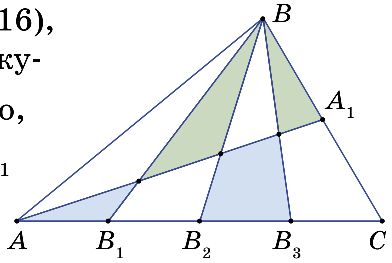


Рис. 16

Тогда суммарная площадь «кусков линолеума» ABB_1, B_2BB_3 и ACA_1, лежащих в треугольнике ABC, равна его площади. При этом синие части покрыты дважды, а зелёные не покрыты ни разу. По лемме о линолеуме площади синей и зелёной областей равны[3].

Когда-то в журнале «Юный техник» была рубрика «По ту сторону фокуса», где раскрывались секреты их создания. Давайте попробуем заглянуть в процесс создания задачи.

Рассмотрим правильный шестиугольник $ABCDEF$ (рис. 17). Проведём в нём главные диагонали, точку их пересечения обозначим через O. Сумма площадей шести правильных треугольников, на которые диагонали разбивают шестиугольник, равна его площади. Каждая главная диагональ параллельна паре противоположных сторон.

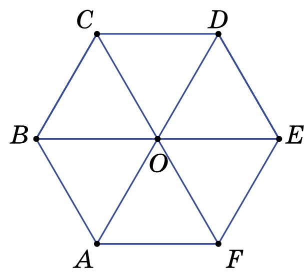


Рис. 17

Перекосим каждый из шести треугольников так, как показано на рисунке 18. Получим фигуру (рис. 19), похожую на объектив фотоаппарата (рис. 20).

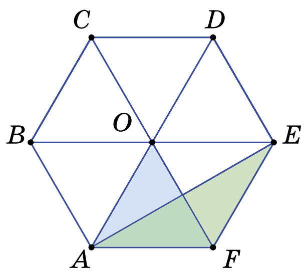


Рис. 18

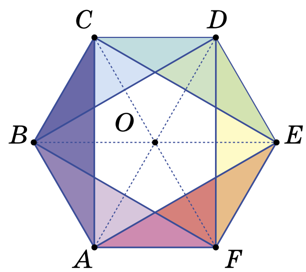


Рис. 19


Рис. 20

Вопрос: «Что больше: площадь части шестиугольника, покрытой дважды или не покрытой ни разу?»

[3] См. также задачи кружка И. А. Егоровой по ссылке kvan.tk/linoleum

Художник Мария Усеинова

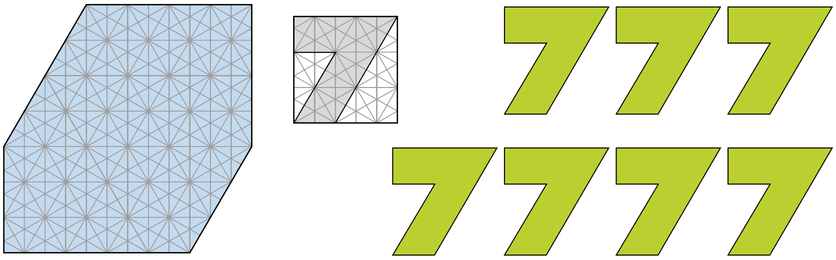
СЕМЬ СЕМЁРОК

Владимир Красноухов

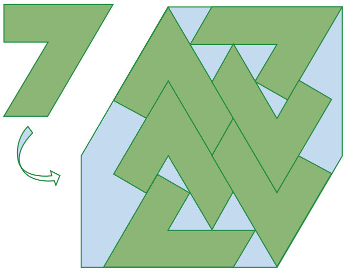
Головоломка состоит из игровых элементов и корпуса с нишей. Изготовить все детали можно из фанеры с помощью лобзика, по эскизам ниже.

Корпус имеет прямоугольную форму. Он склеен из двух пластин, как слоёный пирог. В верхней пластине сделан вырез в форме неправильного шестиугольника (по приводимой на рисунке сетке). Так образуется ниша (углубление) для игровых элементов.

Игровые элементы имеют вид стилизованной цифры 7, размеры и форма соответствуют той же сетке, что и у ниши. Они одинаковы, их 7 штук. [1]



Задача. Разместите все семь семёрок в нише. Их можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.



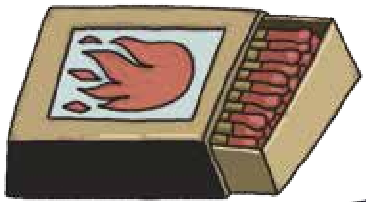
На рисунке справа головоломка «почти» решена, осталось вставить седьмую семёрку... Обратите внимание, как изящно расположены элементы внутри ниши, центрально-симметрично относительно друг друга. Но для окончательного решения задачи эту красоту, возможно, придётся нарушить.

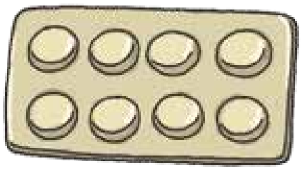
«Семь семёрок» – одна из головоломок, которые решались в финале 24-го Чемпионата России по пазлспорту в Переславле-Залесском 1 августа 2021 г. За 10 минут, отведённые регламентом, с задачей справились трое из двадцати финалистов – Александр Стёпин из Балашихи (Московская обл.), Геннадий Ярковой из Тольятти и Ольга Шут из Минска. Наши же читатели не ограничены никаким регламентом. Желаем успехов!

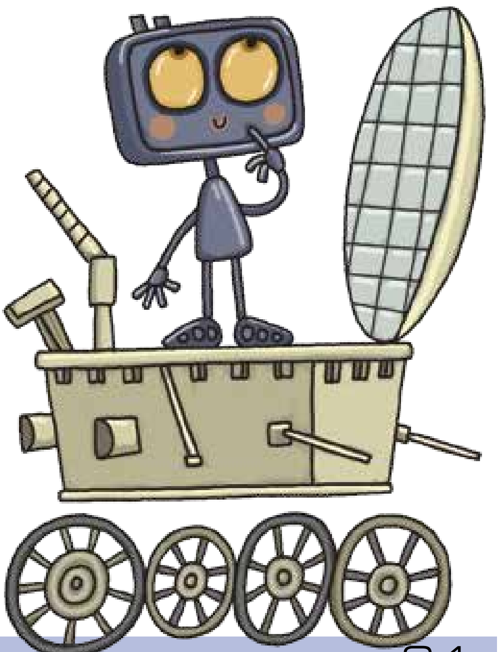
[1] По ссылке kvan.tk/7-7 можно скачать pdf-файл с фигурками.

Художник Алексей Вайнер

Артём Болотин







ИГРА

«Что можно взять с собой в поход?»

Серёжа, Наташа, Рома, Таня и Лёша ждали электричку. Ребятам наскучила городская жизнь, и они решили пойти вместе в поход. Электричка приехала, друзья положили рюкзаки на полки и сели напротив друг друга. Тут Серёжа предложил поиграть в «поход». Все согласились – всё равно ехать долго. Правила очень просты – на своём ходе нужно сказать, как тебя зовут, и назвать какую-то вещь, которую ты хочешь взять с собой «в поход». А ведущий ответит, можешь ты это сделать или нет. Цель – отгадать, по какому принципу он отвечает. Серёжа, как ведущий, начал:

– Меня зовут Сергей. Я возьму с собой спички.

– Меня зовут Наташа. Я возьму с собой нож.

Серёжа кивнул, одобряя выбор Наташи.

– Меня зовут Рома. Я возьму с собой рюкзак.

– Хорошо, бери, – улыбнулся Серёжа.

– Меня зовут Таня. Я возьму с собой тушёнку.

Здесь ведущий тоже не возражал.

– Ну, всё просто! – воскликнул Лёша. – В поход можно брать только то, что там действительно пригодится! Меня зовут Лёша. Я возьму с собой палатку.

– Нет, Лёш, нельзя тебе брать палатку, – усмехнулся Серёжа.

Все с недоумением посмотрели на ведущего.

– Не удивляйтесь, потом сами всё поймёте.

– Так, хорошо, меня зовут Наташа. Я возьму рюкзак, как это сделал Рома.

– Нет, Наташ, тебе рюкзак не нужен.

– Странные какие-то правила, Рома может брать рюкзак, а Наташа – нет! Ладно, меня зовут Таня. Я возьму таблетки. Вдруг у кого-то живот заболит!

– Хорошо, Тань, бери, – согласился ведущий.

– Я понял! Меня зовут Лёша. Я возьму луноход!

Все посмеялись, но на удивление Серёжа разрешил Лёше взять луноход. Наконец, все угадали, по какому правилу отвечал ведущий. Настала ваша очередь!

Подсказка 1. Почему Рома может взять рюкзак, а Наташа не может?
Подсказка 2. Зачем в начале хода нужно произнести своё имя?

– Ну что, продолжим? Сейчас сыграем по какому-нибудь другому правилу, – предложил Серёжа.

– Давай только попроще, – попросила Наташа.

– Хорошо. Меня зовут Серёжа. Я возьму огурец.

– Меня зовут Наташа. Я возьму в поход помидор.

– Только если он неспелый, – улыбнулся Серёжа.

– Меня зовут Рома. Я возьму с собой морковь.
Серёжа отрицательно покрутил головой.

– Меня зовут Таня. Я возьму в поход лимонад.

– Только если это тархун, – ответил ведущий.

Лёша перед своим ходом долго молчал, но потом на лице его засияла улыбка. Он уверенно произнёс:

– Меня зовут Лёша. Я возьму с собой лайм!
Серёжа одобрил этот выбор.

– Меня зовут Серёжа. Я возьму с собой ёлку.

– Серёжа, ну это чересчур простое правило! Меня зовут Наташа. Я возьму с собой лягушку.

Ведущий кивнул. Ещё ребята узнали, что можно брать укроп и капусту, но нельзя – медведя и зеркало, и тут уже все поняли, в чём дело. Догадайтесь и вы!

Подсказка 1. Теперь не важно, кто произносит то или иное слово.
Подсказка 2. Почему помидор можно брать только неспелый, а лимонад – только тархун?

– Итак, до нашей станции ещё ехать два часа, поэтому давайте сыграем с каким-нибудь сложным правилом. Меня зовут Серёжа. Я возьму с собой гитару.

– Меня зовут Наташа. Я возьму с собой книгу.

– Нет, не возьмёшь, – возразил Серёжа.

– Меня зовут Рома. Я возьму в поход тетрадь.

– Не нужна тебе тетрадь, – ответил ведущий.

– Меня зовут Таня. Я возьму с собой барабан.
Серёжа не стал возражать.

– Меня зовут Лёша. Я возьму в поход скрипку.

– Нет, не так всё просто. Меня зовут Серёжа. Я возьму с собой сено.

За оставшиеся два часа пути никто так и не угадал новые правила. А вы сможете? Известно, что каждый мог взять потолок, ногу, ухо, колесо, машину, колос, полено, собаку, дорогу, поле, город, воду, огород, перец, чемодан и ворону. Но никто не мог брать стену, глаз, стол, поезд, печь, виноград, футболку, сосну, дверь, компьютер, полотенце, люстру, солнце, шрифт, знак, рельсы, подъём, окно, шарнир, колпак, светофор, платформу, подъезд, соль и салфетку.

Подсказка 1. Слова с твёрдым или мягким знаком нельзя брать.
Подсказка 2. Следите за согласными и гласными буквами в каждом слове.

Художник Елена Цветаева

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Решения IV тура отправляйте по адресу **ruskonkurs@kvantik.org** не позднее 1 декабря. В письме укажите ваши имя, фамилию, город, школу и класс, где вы учитесь.

Победителей ждут призы, предусмотрены премии за лучшее решение отдельных туров.

Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие мы опубликуем. Так, десятиклассницу Ксению Хорошеву, составившую задачу 20, уже можно назвать нашим постоянным автором.

Желаем успеха!

IV ТУР

16. *Справедливый ИКС, жестокий самоИКС, пустые переИКСы.* Найдите *ИКС*.

Е. Э. Базаров

17. Когда происходит что-нибудь неожиданное, маленькая Ира произносит несколько слов, последнее из которых – «один». Так Ира запомнила распространённое восклицание. Что это за восклицание?

Б. Л. Гуревич

18. Если в названии знаменитого романа к обоим существительным добавить уменьшительный суффикс, получится, что его герои – ШПАТЕЛЬ и ЛИЛИЯ. Какие слова мы заменили на ШПАТЕЛЬ и ЛИЛИЯ?

И. Б. Иткин, С. И. Переверзева

19. Некоторые языки мира используют так называемое *консонантное письмо* – письмо, в котором обозначаются только согласные. Представим себе, что русский язык тоже перешёл на такое письмо, при этом никаких других изменений не произошло, то есть все слова пишутся так же, как обычно, но отсутствуют буквы А Е Ё И О У Ъ Ы Ь Э Ю Я, так что, например, фраза *Съешь пирожок!* записывается как *Сш прж к!*

Приведите пример глагола I спряжения, у которого в такой системе записи различаются формы 3 лица единственного числа и 3 лица множественного числа настоящего времени.

А.Ч. Пиперски

20. То ли это промежуток времени, то ли призыв убрать что-нибудь с глаз долой. Напишите это.

К. С. Хорошева

Художник Николай Крутиков

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, III тур («Квантик» № 7, 2021)

11. *Маленький Вова считает, что некое транспортное средство названо по имени его младшего брата. Как зовут Вовиного брата? Как называется это транспортное средство?*

Названий транспортных средств, которые более или менее созвучны с какими-нибудь именами, можно подобрать довольно много – например, *сани* и *Саня* (*Александр*) или даже *велик* (*велосипед*) и *Веля* (*Велимир*). Но, во-первых, выбрать из этих вариантов невозможно, а во-вторых, непонятна логика Вовы: он что, сам не катается на санках или на велосипеде? Перечитаем условие задачи. Если у маленького Вовы есть младший брат, нетрудно догадаться, каким транспортным средством он пользуется (или пользовался ещё совсем недавно). Конечно же, это детская ***коляска***, а брата, соответственно, зовут ***Коля*** (***Николай***).

12. *Неужели в этом слове три приставки и ни одного корня? Сам чёрт не разберёт. Напишите это слово.*

Это слово – ***преисподняя***. Оно и в самом деле выглядит так, словно состоит из трёх приставок – *пре-*, *ис-* и *под-*, суффикса *-н-* и окончания *-яя*. Важно, что приставка *под-* здесь очень хорошо подходит по смыслу: как известно, ад находится где-то в глубине Земли. Следует ли, действительно, выделять в этом слове три приставки и нулевой корень, или же *под-* как раз и выступает в нём в функции корня? Вопрос сложный, так что даже сам чёрт, хоть и является обитателем преисподней, с уверенностью не разберёт… это слово по составу.

13. *Каким уникальным свойством обладают русские слова* сто *и* миллион*?*

В слове *сто* – 3 буквы, в числе 100 – 3 цифры. В слове *миллион* – 7 букв, в числе 1000000 – 7 цифр. Других таких названий чисел в русском языке нет.

14. *Некоторые языки мира используют так называемое* ***консонантное письмо*** *– письмо, в котором обозначаются только согласные. Представим себе, что русский язык тоже перешёл на такое письмо, при этом никаких других изменений не произошло, то есть все слова пишутся так же, как обычно, но отсутствуют буквы А Е Ё И О У Ъ Ы Ь Э Ю Я, так что, например, фраза* Съешь пирожок! *записывается как* Сш пржк!

Приведите пример глагола, который в такой системе записи выглядит одинаково во всех четырёх формах прошедшего времени и в одной из форм настоящего времени. Укажите эту форму.

В качестве ответа подходят **глаголы II спряжения, у которых перед *-ить* (*-еть*) стоят так называемые губные согласные – *б*, *в*, *м*, *п* или *ф*. В форме 1 л. ед. ч.** настоящего времени у таких глаголов перед окончанием *-ю* появляется *-л-*, и в записи консонантным письмом эта форма выглядит так же, как формы прошедшего времени с суффиксом *-л-*: *любил*, *любила*, *любило*, *любили*, *люблю* – ЛБЛ; *гремел*, *гремела*, *гремело*, *гремели*, *гремлю* – ГРМЛ и так далее.

15. *Действие, обозначаемое этим существительным, обычно совершают вовсе не по отношению к ножу, который хотят наточить, а по отношению к человеку, которого хотят похвалить или наградить. Напишите это существительное.*

Речь идёт о слове ***поощрение***. Это существительное одного корня с прилагательным *острый* (редкое чередование *стр ~ щр* встречается ещё в паре *пёстрый ~ испещрить*), но в современном языке оно имеет только абстрактное значение – «похвала, награда за какие-нибудь достижения». В основе этого смыслового переноса лежит сравнение: предполагается, что ободрённый похвалой или наградой человек начнёт работать ещё лучше – так же, как начинает лучше резать заново наточенный нож.

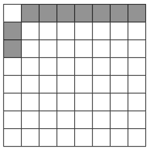
НАШ КОНКУРС, XII тур («Квантик» № 8, 2021)

56. *Каждый из 10 школьников должен был купить в поход по 2 кг крупы. Но крупа продавалась в пачках, весивших меньше килограмма, и часть школьников взяли по три пачки (с запасом), а часть – по две (с недостачей). В итоге всё равно получилось ровно 20 кг крупы. Сколько весила одна пачка, если её масса в граммах целая?*

Ответ: 800 г. Всего крупы у нас 20 000 г. Так как каждый из 10 человек взял две пачки (меньше 2 кг) или три пачки (больше 2 кг), а получилось так, будто все взяли по 2 кг, минимум была взята 21 пачка, а максимум – 29. Масса крупы должна делиться на число пачек, но 20 000 получается перемножением двоек и пятёрок, значит, число пачек тоже должно так получаться. Среди чисел от 21 до 29 такое число только одно – 25. Поделив 20 000 на 25, получаем ответ.

57. *На шахматной доске* 8×8 *надо отметить несколько клеток так, чтобы не нашлось ни одного равнобедренного треугольника с вершинами в центрах отмеченных клеток. Легко отметить* 8 *клеток – например, все клетки любой вертикали: их центры лежат на одной прямой и не образуется вообще ни одного треугольника, в том числе и равнобедренного. А можно ли отметить больше* 8 *клеток? (Возможно, в решении вам пригодится теорема Пифагора.)*

Ответ: да. Вот пример для 9 клеток (отмеченные клетки серые):



Докажем, что пример подходит. Рассмотрим любой треугольник с вершинами в центрах серых клеток. Если две его вершины лежат в левом столбце, то его вертикальная сторона равна 1, а две «наклонные» стороны – больше 1 и различны, такой треугольник неравнобедренный. Если же две его вершины лежат в верхней строке, то его горизонтальная сторона имеет целую длину, а две наклонные различны. Длина наклонной стороны, по теореме Пифагора, равна корню из суммы a^2+b^2, где a – это 1 или 2. Такая сумма не может быть полным квадратом (разность между соседними квадратами 1, 4, 9, 16, ... целых чисел возрастает: она равна 3, 5, 7, ..., и поэтому прибавив к квадрату 1 или 4, нельзя получить другой квадрат). Значит, обе наклонные стороны не равны горизонтальной, и снова треугольник неравнобедренный.

Примечания. 1. Можно отметить даже 14 клеток (верхняя строка и левый столбец без их общей клетки). С помощью компьютера проверено, что больше 14 клеток отметить нельзя.

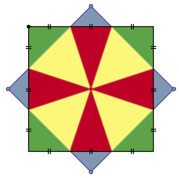
2. Если в условии слово «равнобедренного» заменить словом «прямоугольного», то максимальное число отмеченных клеток – тоже 14, причём подходит тот же пример (докажите!).

58. *За круглым столом сидят* 40 *человек, каждый из которых либо правдолюб (всегда говорит правду), либо лжец (всегда лжёт), либо хитрец (если он произносит два утверждения, то обязательно какое-то из них будет правдивым, а другое ложным). Каждый из сидящих заявил: «Рядом со мной сидит лжец» и «Рядом со мной сидит хитрец». Какое наименьшее число хитрецов может быть за столом?*

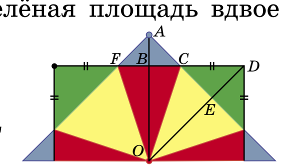
Ответ: 16. Поскольку у правдолюба (П) соседями могут быть только лжец (Л) и хитрец (Х), а у лжеца – два правдолюба, каждый правдолюб и каждый лжец входит в набор вида «...ХПЛПХ...». Значит, все 40 человек разбиваются на наборы вида «ПЛП» и наборы из хитрецов «Х...Х» между ними. При этом каждый набор хитрецов состоит хотя бы из двух человек, ведь соседями хитреца могут быть либо правдолюб и хитрец, либо два хитреца. Значит, на каждые 3 не-хитреца приходится хотя бы 2 хитреца, и всего хитрецов хотя бы $\frac{2}{3+2}=\frac{2}{5}$ от общего количества, то есть хотя бы 16.

16 хитрецов может быть, если посадить за стол 8 пятёрок вида «ХПЛПХ».

59. *Два квадрата с общим центром расположены так, что стороны одного в точках пересечения делят стороны другого на три равные части. Синяя площадь равна* 1. *Найдите зелёную, красную и жёлтую площади.*



Зелёный треугольник CDE делится высотой DE на два, равных синему треугольнику ACF (см. рисунок). Значит, зелёная площадь вдвое больше синей и равна 2.



Далее, проведём в синем и красном треугольниках ACF и OCF высоты AB и OB к общей стороне FC. Высота AB равна половине гипотенузы FC, то есть равна шестой части стороны квадрата. Высота OB равна половине стороны квадрата. Значит, красный треугольник втрое больше синего, и красная площадь равна 3.

Теперь заметим, что треугольник ACO, равный сумме половинок синего и красного треугольников, равен по площади треугольнику ECO, равному половинке жёлтого треугольника. Действительно, у них общая высота OE и равные основания AC и EC. Значит, жёлтая площадь равна сумме синей и красной, то есть 4.

60. *Имеется клетчатое кольцо шириной в* 1 *клетку. Квантик и Ноутик делают ходы по очереди, начинает Квантик. В свой ход Квантик ставит крестик в свободную клетку (где ещё нет никакого значка). Ноутик в свой ход ставит в свободную клетку нолик. Крестик и нолик не могут стоять в соседних клетках. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. У кого из игроков есть гарантированный способ выиграть, если всего клеток в кольце а)* 2020; *б)* 2021?

Ответы: а) у Ноутика; б) у Квантика.

а) Стратегия Ноутика: ставить нолик в клетку, диаметрально противоположную той, куда Квантик поставил очередной крестик. Покажем, что стратегия работает. Пусть в какой-то момент Квантик поставил крестик в некоторую клетку *А*. Клетка *Б*, противоположная клетке *А*, в этот момент свободна. Действительно, нолик в клетке *Б* может появиться лишь после того, как в клетке *А* появился крестик. А если бы в клетке *Б* стоял крестик, то в клетке *А* стоял бы нолик.

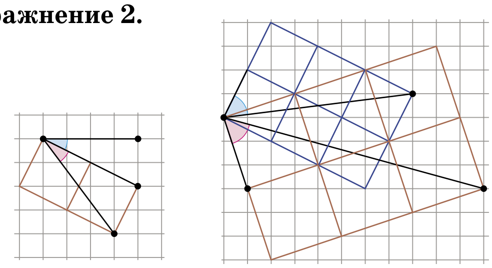
Ноутик не сможет занять клетку *Б* лишь в случае, если в одной из соседних клеток стоит крестик. Тогда в противоположной клетке *В* стоит нолик. Но *В* – соседняя с *А*, поэтому Квантик не мог поставить крестик в *А* – противоречие. Значит, у Ноутика всегда есть ход, и он выиграет.

б) Пусть Квантик первым ходом поставил крестик в некоторую клетку *А*. Мысленно сотрём её и рассмотрим получившееся «уменьшенное кольцо». В нём чётное количество клеток, поэтому у каждой клетки есть противоположная. В игре на уменьшенном кольце первый ход у Ноутика, поэтому Квантик может применить стратегию Ноутика из пункта а), то есть ставить крестик в клетку, противоположную той, куда Ноутик только что поставил нолик. Наличие дополнительной клетки *А* не помешает Квантику, так как там стоит крестик, а не нолик. Значит, Квантик выиграет.

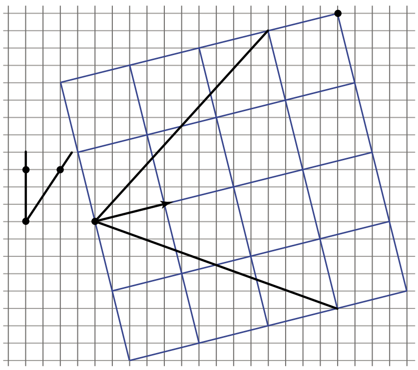
ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ СЕТКИ

(«Квантик» № 9, 2021)

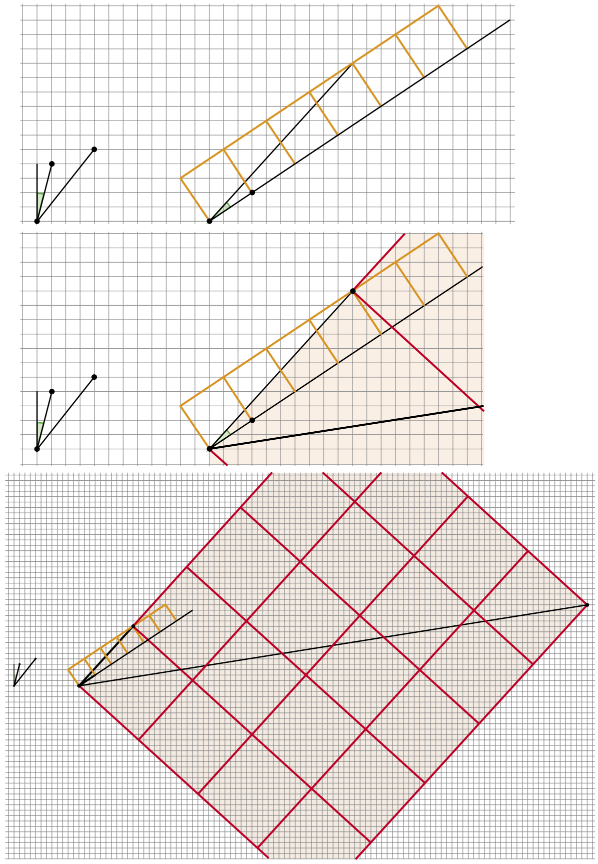
Упражнение 2.



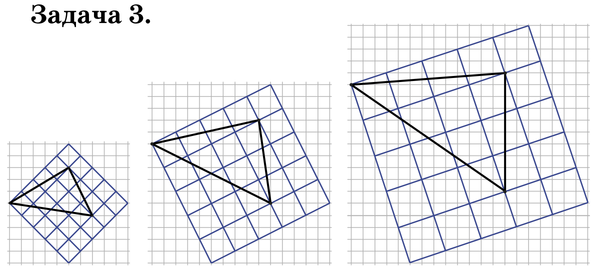
Задача 1.



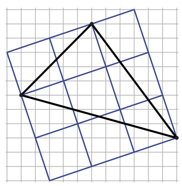
Задача 2.



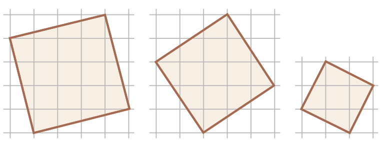
Задача 3.



Задача 4. Если нарисовать треугольник, подобный нашему, в обычной сетке (), его площадь будет в 10 раз меньше.

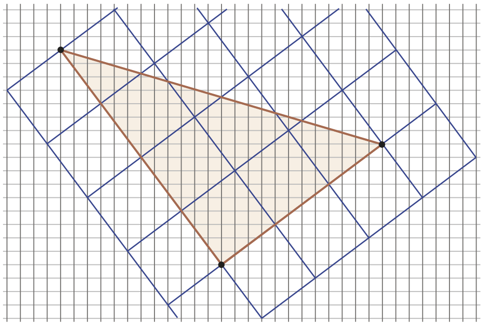


Подберём нужные сетки для увеличения площади маленького треугольника соответственно в 17, 13 и 5 раз:

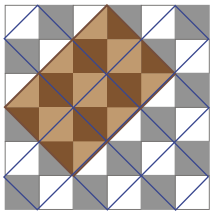


Осталось нарисовать в новых сетках треугольники, подобные исходным.

Задача 5.



Задача 6. Построим треугольник вдвое большей площади, используя вспомогательную сетку с квадратами вдвое большей площади: .



Площадь этого треугольника будет вдвое больше площади исходного. Покажем, что площадь его чёрной части равна площади белой части. Для этого докажем такие три утверждения.

1) Чёрного и белого поровну в любом прямоугольнике со сторонами, идущими по линиям новой сетки.

Это очевидно, поскольку в каждой клетке площадь белой части равна площади чёрной.

2) Чёрного и белого поровну в прямоугольном треугольнике с катетами, идущими по линиям новой сетки.

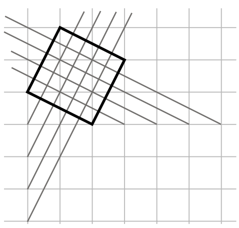
Это следует из того, что диагональ прямоугольника делит его на два равных одинаково раскрашенных прямоугольных треугольника. (Подумайте, как это доказать строго; тут полезно вспомнить о центральной симметрии.)

3) Чёрного и белого поровну в произвольном треугольнике с вершинами в узлах новой сетки.

Это следует из того, что любой такой треугольник можно получить, отрезая от прямоугольника прямоугольные треугольники и меньшие прямоугольники.

Задача 7. Чтобы получить ab-сетку, достаточно построить a-сетку и на ней построить b-сетку.

Чтобы получить a/b-сетку, построим a- и $1/b$-сетки и сведём задачу к предыдущему пункту. $1/b$-сетку можно построить, если через каждую вершину провести линии, параллельные линиям b-сетки.

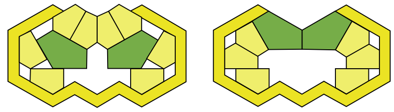


На рисунке справа показано построение 0,2-сетки.

АНТИСЛАЙД С КИРПИЧАМИ

(«Квантик» № 9, 2021)

Приводим по одному решению каждой задачи. Остальные решения найдите самостоятельно.



КАК ПЕРЕКАЧАТЬ ГАЗ?

(«Квантик» № 9, 2021)

Заполним пустые баллоны водой. Соединим один из них с большим баллоном, расположив маленький сверху: газ просочится в маленький баллон, а вода под действием силы тяжести перетечёт в большой. В результате маленький баллон заполнится газом. Затем повторим то же самое со вторым маленьким баллоном.

ПЯТОЕ КОЛЕСО

Мы знаем, что если есть 5 пар колёс, то наибольшее расстояние, которое можно проехать, равно 30 000 км. Значит, если есть 5 колёс, то нельзя проехать более 15 000 км (иначе можно было бы проехать более 30 000 км, имея 5 пар колёс). Расстояние 15 000 км достигается, если менять 5 колёс по кругу (запасное колесо → заднее левое → переднее левое → переднее правое → заднее правое → запасное) через каждые 3 000 км. Но есть две проблемы: 1) колёса нужно часто менять; 2) машина будет ехать на колёсах с разным износом слева и справа, что небезопасно.

ЧИСЛОВАРНЫЕ РЯДЫ

Продолжить ряд с животными можно так: *шестилапый*, *гептапод*, *осьминог*.

1. У поросёнка: его круглый нос назван пятачком по сходству с пятикопеечной монетой, а оценка пять по-другому называется «отлично».

2. *Тритон*: название музыкального интервала связано с тремя тонами, а название животного происходит от имени бога Тритона, тройка тут ни при чём.

3. *Спектакль* лишнее, поскольку не имеет отношения к числам. Пентакль – от греч. *пенте*, «пять»; бинокль – от лат. *бини*, «двое», как в слове *бинарный*.

ИГРА «ЧТО МОЖНО ВЗЯТЬ С СОБОЙ В ПОХОД?»

1. Слова должны начинаться на ту же букву, что и имя игрока.

2. Предмет должен быть зелёного цвета.

3. В слове гласные и согласные должны чередоваться.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Первый этап состоит из четырёх туров (с I по IV) и идёт с сентября по декабрь.

Высылайте решения задач II тура, с которыми справитесь, не позднее 5 ноября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

II ТУР

6. Кресла в самолёте расположены в 30 рядов. Расстояние между рядами одно и то же, расстояние между спинками кресел, идущих друг за другом, равно 80 см. С целью добавить новые ряды, пустое пространство перед каждым креслом решили уменьшить на 5 см. Сколько теперь поместится рядов в салоне самолёта?

7. Во внешнюю сторону от квадрата построены два равносторонних треугольника с вдвое меньшей стороной (см. рисунок). Чему равен угол, отмеченный знаком вопроса?

Авторы: Максим Волчкевич (6), Константин Кноп (7), Александр Перепечко (8, 10), Алексей Толпыго (9)

8. Несколько интровертов и экстравертов хотят разбиться на четыре команды. Каждый по очереди выбирает команду, причём интроверты выбирают какую-то команду минимального размера на момент выбора, а экстраверты – максимального. Могли ли команды получиться попарно различного размера?

9. Дан правильный шестиугольник *ABCDEF*. Любые три его вершины образуют треугольник, всего таких треугольников 20. Квантик хочет отметить внутри шестиугольника как можно меньше точек, чтобы внутрь каждого из этих 20 треугольников попала хоть одна отмеченная точка. Приведите пример, как отметить точки, чтобы выполнялось это условие, и докажите, что меньше точек отметить нельзя.

10. В классе в турнире по армрестлингу каждый сыграл с каждым (ничьих в армрестлинге не бывает). Каждый мальчик одержал вдвое больше побед, чем потерпел поражений, а каждая девочка – вдвое меньше побед, чем поражений.

а) Приведите пример, как такое могло быть.

б) Обязательно ли при этом какая-нибудь девочка победила какого-нибудь мальчика?

Художник Николай Крутиков

ДВА КРУГА И ОТРЕЗОК

У Квантика на столе лежат два параллельных рельса, на каждом горизонтально прикреплён за свой центр деревянный круг (круги имеют разные радиусы и расположены над столом на одной высоте). Квантик хочет отметить на границе каждого круга точку так, чтобы соединяющий их отрезок был параллелен рельсам и имел *наименьшую* возможную длину. Как это сделать? При решении Квантик может отмечать точки на рельсах и на кругах, соединять их прямыми (положив линейку на круги и проводя по ней линии на кругах). А ещё он может временно сдвинуть любой круг вдоль своего рельса на любое расстояние (без вращения), а потом вернуть обратно.

Справится ли Квантик с аналогичной задачей, если отрезок должен иметь *наибольшую* возможную длину?

ISSN 2227-7986 21010

9 772227 798213

Автор Александр Романов

Художник Мария Усеинова