№ 3 | март 2021

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 3
март 2021

ПАРКЕТ ХУДОЖНИКА-АВАНГАРДИСТА

КАК ИЗ МОНЕТКИ СДЕЛАТЬ КУБИК

ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ В ЯЗЫКАХ МИРА

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

www.kantik.com
kvantik@mccme.ru

instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 3, март 2021 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, Е. А. Котко, Р. В. Крутовский, Г. А. Мерзон, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник Yustas
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Алексей Вайнер

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05,
e-mail: kvantik@mccme.ru
сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84x108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 19.02.2021
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус»
г. Нижний Новгород,
ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Владимир Протасов

Но когда оказалось, что он ровно ничего не знает ни о теории Коперника, ни о строении солнечной системы, я просто опешил от изумления.

Артур Конан Дойл,
«Этюд в багровых тонах»

КАК ДРЕВНИЕ ГРЕКИ ОПЕРЕДИЛИ КОПЕРНИКА

Больше двух тысячелетий назад, в Древней Греции, астроном Аристарх Самосский пришёл к выводу, что Земля вращается вокруг Солнца. Постойте, постойте! Это же сделал Николай Коперник! И не два тысячелетия, а «всего» 500 лет назад. Это ведь он доказал, что все планеты вращаются вокруг Солнца. Или нет? Да, конечно, Коперник. Он установил это, опираясь на множество расчётов и наблюдений, на которые потратил 40 лет. Но первая гелиоцентрическая модель Солнечной системы была построена не им, а Аристархом, на 1800 лет раньше! Коперник знал о ней и строго подтвердил и обосновал эту модель.

Аристарху удалось невероятное – пользуясь элементарной геометрией, лишь наблюдая за небом, он придумал способ вычислить размеры Луны и Солнца и расстояния до них. И написал об этом книгу «О величинах и расстояниях Солнца и Луны». А разве так можно? Ведь Луна и Солнце очень далеко. Как узнать их размеры без современных приборов, без применения законов физики? Оказывается, можно, причём совсем простым рассуждением, доступным школьнику. Сейчас мы сами это проделаем. Найдём размеры Солнца и Луны, а потом вместе с Аристархом придём к выводу о том, что именно Земля должна вращаться вокруг Солнца, а не наоборот. Но Аристарху тогда никто не поверил. Почему? В этом мы тоже разберёмся. Но прежде чем измерять другие планеты и звёзды, надо измерить Землю.

ИЗМЕРЯЕМ ЗЕМЛЮ

То, что Земля – это шар, люди знали давно. Древние мореплаватели наблюдали, как в течение путешествия меняется картина звёздного неба: становятся видны новые созвездия, а другие, напротив, заходят за горизонт. Если смотреть с берега на уплывающий вдаль корабль, то кажется, что он «уходит под воду» на линии горизонта. Сначала «тонет» сам корабль, а последней скрывается из вида верхушка его мачты.[1]

[1] Конечно, для этого надо обладать очень острым зрением и делать наблюдения в благоприятных условиях. Но в наше время, с помощью оптики с большим увеличением, это сделать легко. Видео «проседающего» на горизонте корабля есть в Интернете: kvan.tk/horizon-ship

Кто первый высказал идею о шарообразности Земли, неизвестно. Возможно – Пифагор и его ученики, считавшие шар совершеннейшей из фигур. Полтора века спустя Аристотель приводит несколько доказательств шарообразности Земли. Главное из них: во время лунного затмения на поверхности Луны отчётливо видна тень от Земли, и эта тень круглая!

Если Земля – шар, то чему равен её радиус? Многие учёные пытались его измерить, но получалось неточно. Во времена Аристотеля радиус нашли с ошибкой в полтора раза. Считается, что первым, кому удалось сделать это с высокой точностью, был греческий математик Эратосфен Киренский (276–194 г. до н. э.). Все о нём знают благодаря *решету Эратосфена* – способу находить простые числа (числа, имеющие ровно два натуральных делителя – единицу и само себя). Если написать подряд все целые числа, начиная с двойки: 2, 3, 4, 5, ..., вычеркнуть из этого ряда все чётные числа, кроме первого (самого́ числа 2), затем все числа, кратные трём, кроме числа 3, и т.д., то в результате останутся в точности все простые числа (рис. 1).

Рис. 1 2 3 ~~4~~ 5 ~~6~~ 7 ~~8~~ ~~9~~ ~~10~~ 11 ~~12~~ ...

Эратосфен был крупнейшим учёным-энциклопедистом, занимался не только математикой, но и географией, картографией и астрономией. Он долгое время возглавлял Александрийскую библиотеку в Египте – главный научный центр того времени. Работая над составлением первого атласа Земли (конечно, не всей Земли, а известной к тому времени её части), он задумал провести точное измерение земного шара. Ведь чтобы составить карту, надо знать расстояния!

Идея была такова. К югу от Александрии, в городе Сиена (современный Асуан) один день в году, ровно в полдень, Солнце достигает зенита – высшей точки на небе. Исчезает тень от вертикального шеста, на несколько минут освещается дно колодца. Происходит это в день летнего солнцестояния, 22 июня – день наивысшего положения Солнца на небе. Эратосфен направляет своих помощников [2] в Сиену, и те устанавливают, что ровно в полдень (по солнечным часам) Солнце находится точно в зените. Одновремен-

[2] По легенде, одним из них был Архимед, друживший с Эратосфеном.

но (как написано в первоисточнике: «в тот же час») Эратосфен измеряет длину тени от вертикального шеста в Александрии. Получился треугольник, который на схематичном рисунке 2,*а* мы обозначили *KAB* и перерисовали крупнее на рисунке 2,*б*. В Сиене солнечный луч перпендикулярен поверхности Земли, значит, если его продолжить, пройдёт через центр Земли. Параллельный ему луч в Александрии составляет угол с вертикалью, который мы обозначим буквой α. Такой же угол образуют радиусы Земли ZA и ZS, идущие из центра Земли в Александрию и Сиену. Семиклассники знают, почему – потому что накрест лежащие углы при параллельных прямых равны. А младшие пусть поверят нам на слово.

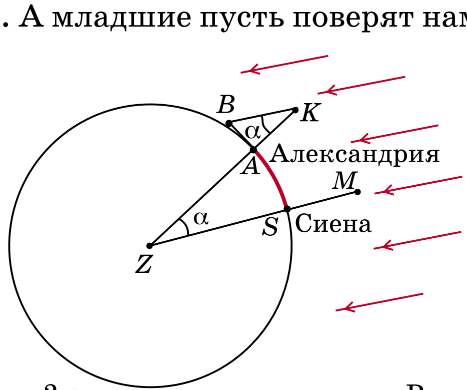


Рис. 2,*а*

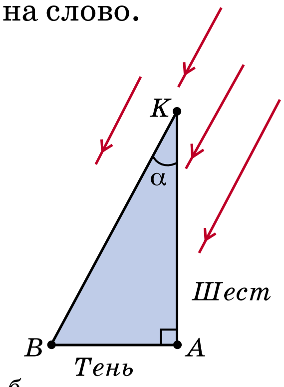


Рис. 2,*б*

Теперь нарисуем круг радиусом 1 с центром на конце шеста – в точке K (рис. 2,*в*). Измерим длину дуги внутри угла α, обозначим её буквой d. На рисунке она выделена красным, а круговой сектор (то есть «долька» круга) – синим. Ему соответствует гигантский круговой сектор между радиусами Земли ZA и ZS, и он подобен синей «дольке», потому что имеет тот же угол α. Значит, дуга AS во столько раз больше дуги d, во сколько раз радиус Земли $R = ZA$ больше радиуса маленького круга, равного 1. Итак, $AS : d = R : 1$. Длину d мы знаем (измерили). Как найти длину дуги AS? Это длина пути из Александрии в Сиену, около 800 км. Её Эратосфен аккуратно вычисляет, исходя из среднего времени движения верблюжьих караванов между двумя

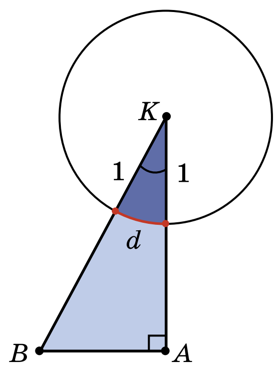


Рис. 2,*в*

городами, а также используя данные бематистов – людей особой профессии, измерявших расстояния шагами. Поделив 800 км на длину дуги d, находим радиус Земли – примерно 6400 км. А длина окружности Земли равна $2\pi R = 40\,000$ км. Удивительно, что получилось столь круглое число! Разгадка проста: сама единица длины в 1 метр и была введена (во Франции в конце XVIII века), как одна сорокамиллионная часть окружности Земли (по определению!).

Эратосфен, конечно, использовал другую единицу измерения – *стадий* (около 200 м). Стадиев было несколько: египетский, греческий, в авилонский, и каким из них пользовался Эратосфен – неизвестно. Поэтому трудно судить наверняка о точности его измерения. Кроме того, неизбежная ошибка возникала в силу географического положения двух городов. Если города находятся на одном меридиане, то полдень в них наступает одновременно. Поэтому, сделав измерения во время наивысшего положения Солнца в каждом городе, мы получим правильный результат. Но на самом деле Александрия и Сиена – не на одном меридиане. Мы можем легко в этом убедиться, взглянув на карту, но у Эратосфена карты не было (ведь он как раз и составлял первую карту). Поэтому его метод (абсолютно верный!), скорее всего, дал неточный результат. Тем не менее, многие исследователи уверены, что точность измерения Эратосфена была высока и что он ошибался менее чем на 2 %. Более точное значение было получено только через 2 тысячи лет, в середине XIX века. Над этим трудилась группа учёных во Франции и экспедиция В. Я. Струве в России. Даже в эпоху великих географических открытий, в XVI веке, люди не смогли достичь результата Эратосфена и пользовались неверным значением длины земной окружности. Ни Колумб, ни Магеллан не знали, каковы истинные размеры Земли и какие расстояния им придётся преодолевать. Они-то считали, что длина экватора гораздо меньше, чем на самом деле. Знали бы – может и не поплыли бы.

В чём причина высокой точности метода Эратосфена? До него измерения были *локальными*, на рас-

стояниях, обозримых человеческим глазом, то есть не более 100 км. При этом неизбежны ошибки из-за рельефа местности, атмосферных явлений и т.д. Для большей точности нужно проводить измерения на очень больших расстояниях. Восьмисот километров между Александрией и Сиеной оказалось достаточно.

Опыт Эратосфена можно проделать и в наших широтах, где Солнце не бывает в зените. Правда, для этого нужны две точки обязательно на одном меридиане. Если же повторить опыт Эратосфена для Александрии и Сиены, сделав измерения в этих городах одновременно (сейчас это легко, можно послать SMS), мы получим верный ответ. И будет неважно, находятся ли города на одном меридиане (почему?).

ИЗМЕРЯЕМ ЛУНУ И СОЛНЦЕ

Оказывается, измерить «подручными средствами» Луну и Солнце даже проще, чем Землю. Для этого не нужно уходить за 800 км, а можно всё сделать, не сходя с места. Мы повторим рассуждения Аристарха, попутно чуть поправив и упростив их.

Наши измерения будут состоять из трёх простых шагов. Сначала понаблюдаем за Луной.

ШАГ 1. Во сколько раз Солнце дальше, чем Луна?

Почему иногда видна полная Луна, а иногда месяц? Потому что Луна светит отражённым солнечным светом. Если взять шар и посветить на него с одной стороны, то в любом положении освещённой окажется ровно половина шара. Так же и Солнце всегда освещает ровно половину поверхности Луны. Видимая форма Луны зависит от того, как повёрнута к нам эта освещённая половина. В новолуние, когда Луна вовсе не видна на небе, Солнце освещает её обратную сторону. Затем освещённая половина постепенно поворачивается в сторону Земли. Мы начинаем видеть тонкий серп, затем – месяц («растущая Луна»), далее – полукруг (эта фаза Луны называется «квадратурой»). Затем день ото дня (вернее, ночь от ночи) полукруг дорастает до полной Луны. Потом начинается обратный процесс: освещённая полусфера от нас отворачивается. Луна «стареет», постепенно превращаясь в месяц, повёрнутый к нам левой стороной, подобно букве «С», и, наконец, в ночь новолуния исчезает. Период от одного новолуния до другого длится примерно четыре недели. За это время Луна совершает полный оборот вокруг Земли. От новолуния до половины Луны проходит четверть периода, отсюда и название «квадратура».

Замечательная догадка Аристарха была в том, что, когда Луна в квадратуре, солнечные лучи, освещающие половину Луны, перпендикулярны прямой, соединяющей Луну с Землёй, то есть треугольник ZLS, соединяющий Землю, Луну и Солнце, – прямоугольный (рис. 3). Для простоты мы считаем, что наблюдатель находится в центре Земли. Это несильно повлияет на результат, так как расстояние от Земли до Луны и до Солнца значительно больше размеров Земли.

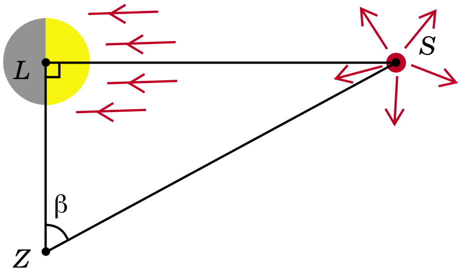


Рис. 3. Луна в квадратуре (схема)

Измерим угол β между лучами ZL и ZS во время квадратуры. Для этого надо одновременно видеть на небе Солнце и Луну: такое возможно, например, ранним утром. Затем нарисуем на большом листе другой прямоугольный треугольник с тем же углом β. Эти треугольники подобны. Измерив линейкой треугольник на листе, мы узнаем, что его гипотенуза в 400 раз больше катета. Значит, и в гигантском треугольнике ZLS гипотенуза ZS во столько же раз больше катета ZL. Таким образом, $ZS = 400\ ZL$, значит **Солнце в 400 раз дальше от Земли, чем Луна**.

Аристарх получил отношение 20, а не 400, в первую очередь из-за того, что точно установить момент наступления квадратуры по внешнему виду Луны крайне трудно. И всё же наблюдение Аристарха впечатляет. Если бы, как тогда многие считали, Солнце и Луна были примерно на одном расстоянии от Земли, то в момент, когда Луна освещена наполовину, они находились бы недалеко друг от друга на небе, что совсем не так. Убедитесь в этом сами, посмотрев во время квадратуры днём на небо: положение Луны относительно Солнца позволит вам хоть немного лучше ощутить эти огромные масштабы.

Окончание следует

Художник Мария Усеинова

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Михаил Гельфанд

Монеты германского герцогства

Приведены фотографии оборотных сторон и вес (для серебряных – ещё и проба, то есть доля серебра в сплаве) монет германского герцогства Саксен-Кобург-Гота середины XIX века (на лицевых сторонах – портреты герцогов).

Сколько пфеннигов в гроше? Сколько грошей в талере? А сколько гульденов? Сколько талеров в марке? А в фунте? Сколько граммов чистого серебра в гроше и в талере?

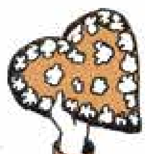
Ответы на эти вопросы не вполне согласуются друг с другом. В чём противоречие? Как его можно объяснить?

медь, 1,5 г

медь, 3 г

серебро,
проба .230, вес 1,06 г

серебро,
проба .230, вес 2,12 г



серебро,
проба .312, вес 3,125 г

серебро,
проба .300, вес 3,25 г

серебро,
проба .521, вес 5,35 г

серебро,
проба .750, вес 22,27 г

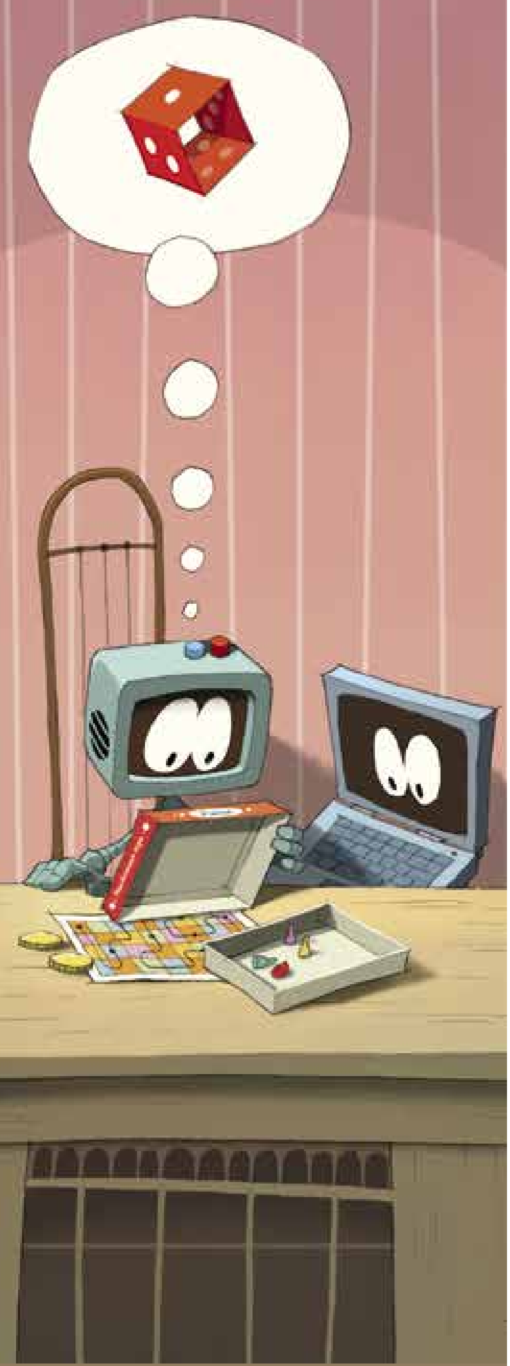
серебро,
проба .900, вес 18,56 г

серебро,
проба .900, вес 37,12 г

Художник Артём Костюкевич

Григорий Мерзон,
Александр Перепечко
(по мотивам Питера Камерона)

КАК ИЗ МОНЕТКИ СДЕЛАТЬ КУБИК, ИЛИ ЛЮБОЙ ЖРЕБИЙ ЗА ДВА БРОСКА



– Кинуть четырёхгранный кубик, и если выпала единица... – бормотал себе под нос Квантик.

– Что ты делаешь? – заинтересовался Ноутик.

– Нашёл настольную игру, а в ней нужно каждый ход кидать четырёхгранный кубик, – пояснил Квантик. – И где я такой достану?

– А пара монеток не подойдёт? У них четыре равновероятных исхода. Если выпало две решки – вот тебе и единица!

– Только одна нашлась. Ну ничего, по два раза буду кидать, – утешился Квантик.

– Если при первом броске выпал орёл, второй раз можно не кидать, – подсказал Ноутик. – На ход будет то один бросок, то два – в среднем полтора! Довольно удобно. А можно с тобой?

– Ага! Та-ак... При игре вдвоём киньте шестигранный кубик, – вновь углубился в правила Квантик. – Боюсь, у меня и такого нет. Но нам нужно лишь проверять, не выпала ли на кубике единица. Может, тоже обойдёмся монеткой?

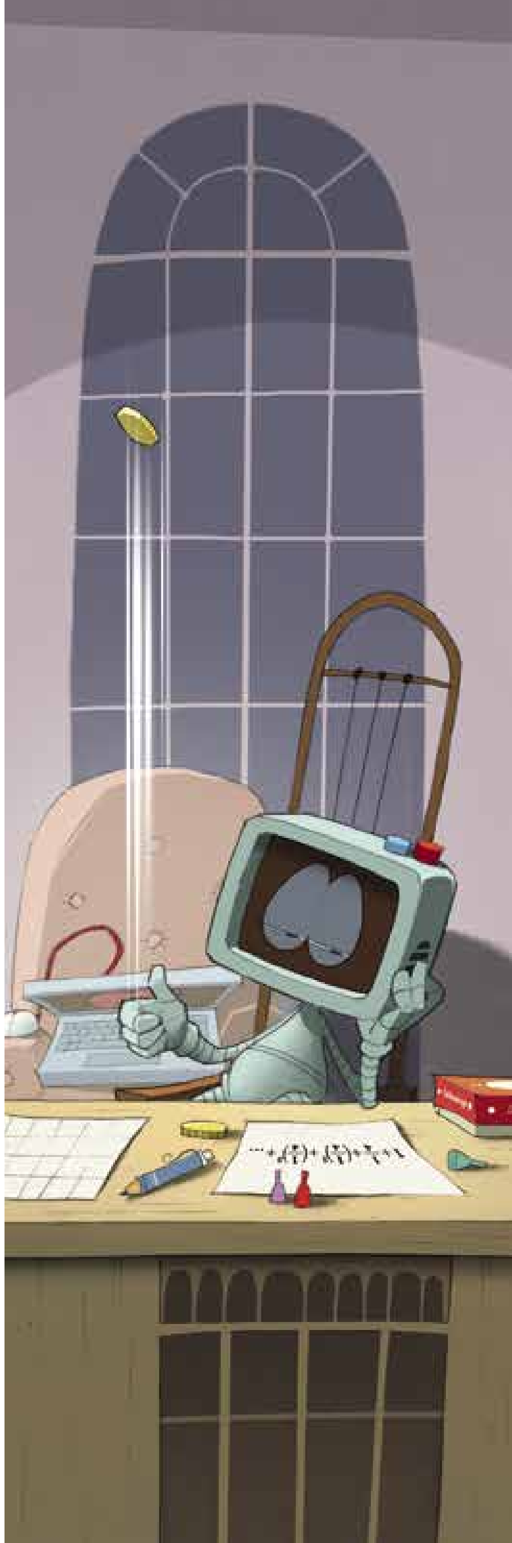
Можно ли монеткой заменить игральный кубик?

Итак, перед Квантиком встала такая задача:

Монетка при подкидывании выпадает орлом или решкой с одинаковой вероятностью $\frac{1}{2}$. *Можно ли с её помощью получить жребий, выпадающий с вероятностью* $\frac{1}{6}$*?*

Нетрудно получить жребий, который выпадает с вероятностью, *близкой* к $\frac{1}{6}$. Например, если подкинуть монетку 5 раз, то возможны $2^5=32$ различных исхода. Объявим 5 из них «успехом» (то есть жребий выпал), а остальные 27 – «неудачей» (жребий не выпал). Тогда вероятность успеха будет $\frac{5}{32}$, что лишь чуть меньше $\frac{1}{6}$. Но кажется, что получить вероятность *ровно* $\frac{1}{6}$ при помощи монеты невозможно: ведь для любого выбранного числа успешных бросков вероятность успеха будет равна дроби со знаменателем – степенью двойки.

На самом деле, как уже рассказывал Квантик[1], у таких «невозможных» задач вполне есть решение.



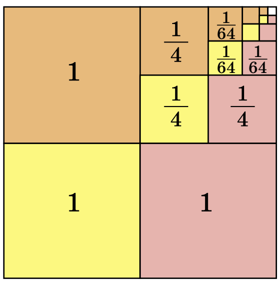
Подкинем монетку трижды – возможны $2\cdot2\cdot2=8$ исходов. Объявим один из них успехом, пять – неудачей, а в оставшихся двух случаях объявим жребий пока не разыгранным и повторим процедуру. Хоть необходимое число бросков заранее не ограничено, рано или поздно жребий будет разыгран, и вероятность успеха будет ровно в 5 раз меньше вероятности неудачи, то есть равна $\frac{1}{6}$.

Сколько времени занимает бесконечный процесс? Хотелось бы, конечно, разыграть жребий побыстрее! Если не будет везти, Квантик может кидать монетку очень долго. А сколько раз ему придётся кидать монетку *в среднем*?

Первая процедура из трёхкратного подбрасывания монетки будет проведена всегда, то есть с вероятностью 1. Вторая – только если жребий не был разыгран в первой процедуре, то есть с вероятностью $\frac{1}{4}$. Третья – только если жребий не был разыгран в первых двух процедурах, то есть с вероятностью $\left(\frac{1}{4}\right)^2$, и т. д.

Поэтому, чтобы найти среднее число процедур (как ещё говорят, *математическое ожидание*[2]), нужно вычислить бесконечную сумму $1+\frac{1}{4}+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^3+\ldots$

Это можно сделать *с помощью картинки*[3] ниже: разными цветами там закрашены три части квадрата 2×2, площадь каждой части равна нашей сумме.



Итак, среднее число процедур равно $4/3$, а в каждой процедуре – три подбрасывания, то есть в среднем Квантику потребуется $\frac{4}{3}\cdot3=4$ подбрасывания монеты.

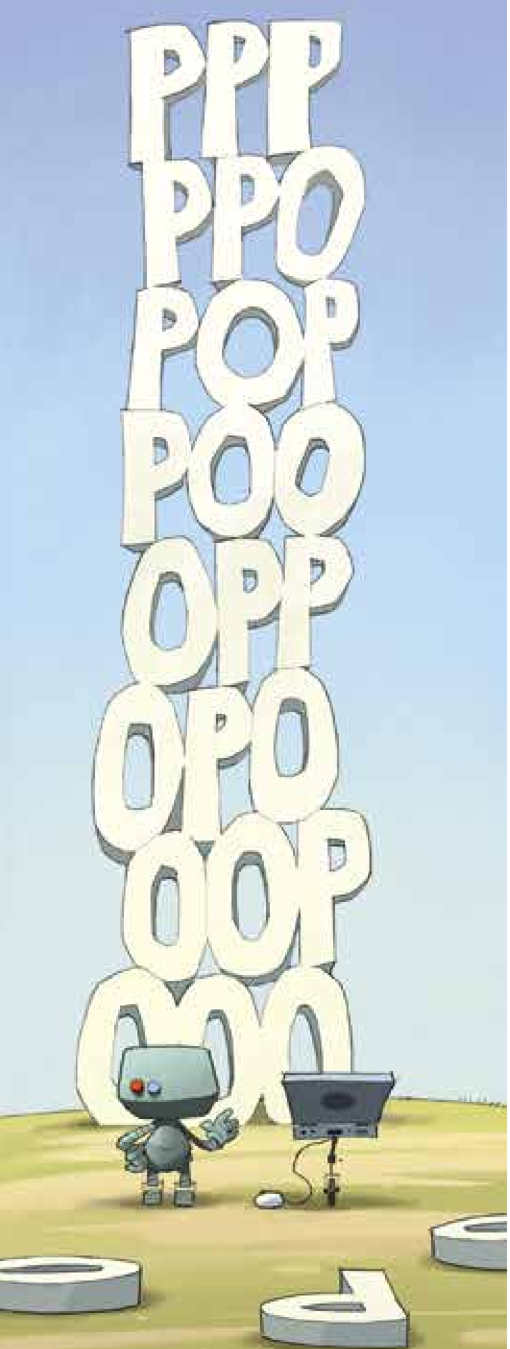
А нельзя ли побыстрее?

Разыгрывая жребий, мы объявляли успехом 1 исход из 8. Можно сказать, мы начинали с того, что приближали $\frac{1}{6}$ числом $\frac{1}{8}$. Но поскольку $\frac{1}{6}\neq\frac{1}{8}$, у нас

[1] См. статью Г. Мерзона «1/3, или Две невозможные задачи с решениями», Квантик № 6, 2019.

[2] См. статьи И. Высоцкого и И. Акулича «Новые приключения Стаса», Квантик № 3 – 5, 2016.

[3] См. также статью «Картинки вычисляют бесконечные суммы», Квантик № 1, 2020.



оставались «лишние» исходы (а именно, 2 исхода из 8), после которых мы повторяли процедуру.

Если приблизить $\frac{1}{6}$ поточнее (скажем, дробью $\frac{5}{32}$), жребий будет реже оставаться неразыгранным. Правда, сама процедура начнёт занимать больше времени. Сходу и не скажешь, будет ли это эффективнее.

Попробуйте найти среднее число бросков, если кидать монетку по 5 *раз* (*объявляя* 5 *исходов успехами,* 25 – *неудачами, а ещё в двух случаях перекидывая монетку заново*). *Оказывается, бросков будет ещё больше.*

Не будем отчаиваться, а посмотрим внимательнее на исходный алгоритм. Из восьми исходов трёхкратного подбрасывания мы объявили один – успехом, а пять – неудачей. Но ведь у нас есть выбор, *каким именно* исходам приписывать успех и неудачу – и этой свободой можно воспользоваться.

Будем кодировать исходы тройками ООО, ООР, ОРО, ОРР, РОО, РОР, РРО, РРР, где О – орёл, а Р – решка. Объявим первый исход (ООО) успехом, а 5 последних – неудачей. Ясно, что если первым выпала решка (а это происходит в половине случаев), дальше монету уже можно не кидать! Тогда одна процедура требует не 3 броска, а в среднем $\frac{1}{2}\cdot 3+\frac{1}{2}\cdot 1=2$ броска, и весь алгоритм займёт в среднем $2\cdot\frac{4}{3}=2\frac{2}{3}$ броска. Уже лучше!

Двух бросков всегда достаточно!

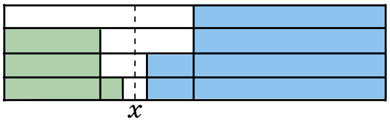
А что делать, если хочется сымитировать жребий с какой-то другой вероятностью успеха x (*например, для $x=\frac{3}{19}$*)*? Насколько больше потребуется времени, чтобы его разыграть?*

Кажется, что чем «сложнее» знаменатель, тем больше нужно бросаний. С другой стороны, увеличивается и простор для оптимизаций.

Удивительно, но всего за два бросания монеты (в среднем) можно сымитировать жребий *с любой* вероятностью успеха! Для этого разовьём идею экономии бросков из предыдущего раздела, а нужный алгоритм опишем… геометрически.

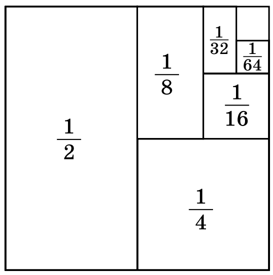
Отметим на отрезке [0;1] точку x. Будем кидать монету, и если выпадает О, будем оставлять от отрезка только левую половину, если выпадает Р –

правую, и дальше повторять процедуру (см. рисунок). Подбросив монету N раз, мы придём к одному из 2^N возможных отрезков. Этот отрезок окажется левее x с вероятностью, близкой к x (и тем ближе, чем больше N). Но мы опять можем экономить броски!



Как только у нас остался отрезок, целиком лежащий левее x — мы останавливаемся и считаем, что выпал успех (ведь уже точно получится отрезок левее x), а если остался отрезок целиком правее x, – останавливаемся и считаем, что выпала неудача. Ну а пока оставшийся отрезок содержит x – продолжаем бросать монету.

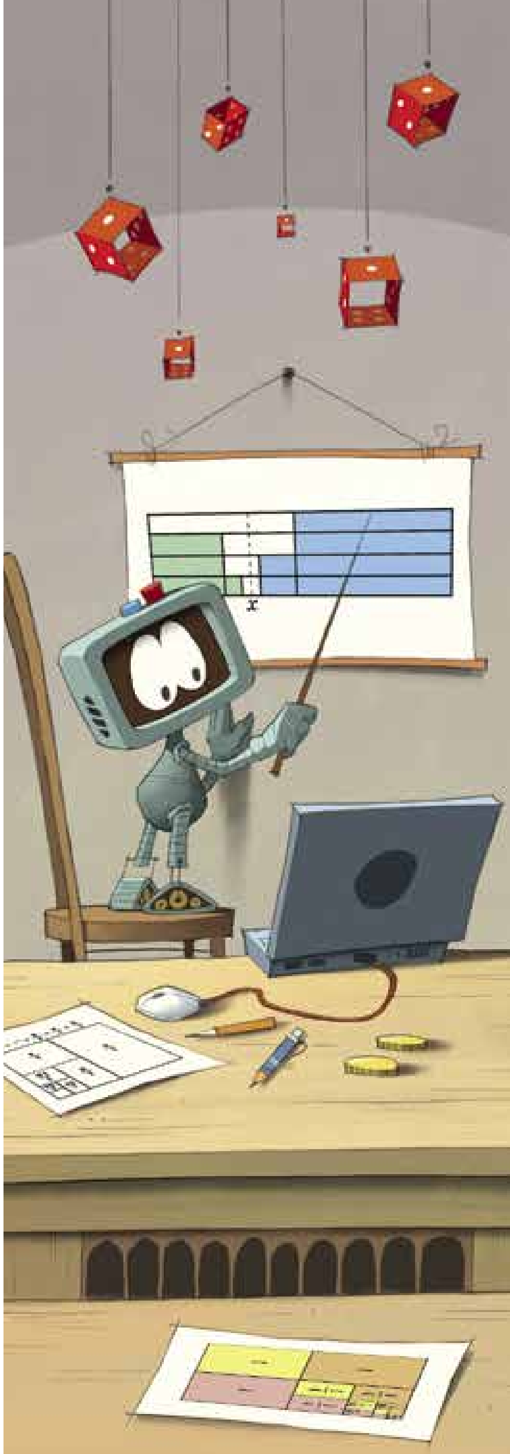
Сколько бросков мы сделаем в среднем? После очередного подбрасывания монеты процесс заканчивается, если мы выбрали тот из отрезков, на котором не лежит точка x. Это обычно происходит с вероятностью $\frac{1}{2}$ (кроме случая, когда x лежит ровно на границе отрезков – тогда всё точно закончится после этого подбрасывания). Итак, первый бросок потребуется с вероятностью 1, второй – с вероятностью $\frac{1}{2}$, третий – с вероятностью $\frac{1}{4}$, и т. д. А всего в среднем потребуется $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=2$ подбрасывания монеты (если x попадает на границу одного из отрезков, то даже меньше).



$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots=1$

Для знатоков. Можно описать тот же алгоритм и алгебраически. Запишем x в виде бесконечной дроби в *двоичной системе счисления*. Будем кидать монету, пока впервые не выпадет решка. И если решка выпала на той позиции, где в записи x стоит 1, будем считать, что жребий выпал, если 0 – не выпал.

Например, для $x=\frac{1}{6}$ получается разложение 0,001010101… – то есть мы кидаем монету пока первый раз не встретится решка, и если на соответствующей позиции в разложении x оказалась 1 (то есть бросков было нечётное число, не равное 1), объявляем жребий выпавшим.



Художник Алексей Вайнер

Детективные истории

Борис Дружинин

Кража на курорте

Вова и Лиза приехали на средиземноморский курорт. Остановились в небольшой уютной гостинице, где каждый постоялец получал свой одноместный номер. Днём отдыхающие купались и загорали, а по вечерам собирались в холле и за чашечкой чая вели неспешные беседы или развлекались настольными играми. Однажды принц Андуйский показал карточный фокус, который привёл в восторг зрителей, особенно леди Хильду и победительницу конкурса красоты Клару Оливию. Вова быстро разгадал секрет фокуса, но рассказал об этом только принцу.

– А чего ты сразу всем не сказал? – спросил принц Андуйский.

– Не хотел тебя подводить, – ответил Вова.

После такого ответа принц зауважал Вову и они подружились. А вечером уже Вова показал свой фокус.

– Внимание! – начал он. – Вчера мой друг принц Андуйский показал прекрасный карточный фокус. Сегодня выступлю я. Смотрите внимательно, показываю только один раз!

Вова покашлял и продолжал.

– Вот обычная колода из 52 карт. Во всех четырёх мастях есть двойки, тройки и так далее. Тузы будут стоить одно очко, двойки – два очка, все остальные карты с цифрами – по своему номиналу. Картинки (валеты, дамы, короли) будут стоить по десять очков. Кто-нибудь перемешает колоду и отдаст мне. Я положу её в карман. Потом кто-нибудь назовёт число от 1 до 25, и я выну из кармана карты с названной суммой очков.

Колоду взялся тасовать самый заядлый в компании картёжник сэр Джеймс Камп. Число вызвалась называть Клара Оливия.

– Что больше, тринадцать или семнадцать? – поинтересовалась она у окружающих.

– Семнадцать, – подсказал кто-то.

– Тогда пусть будет семнадцать, – заявила Оливия.

Вова извлёк из кармана валета, четвёрку, двойку и туза: сумма очков получилась 17, как и просила Оливия. Все принялись просить показать фокус ещё разок, но Вова наотрез отказался.

В чём секрет фокуса Вовы?

Однажды утром в номер к Вове зашёл полицейский.

– У постояльцев этой гостиницы стали пропадать кошельки, – сразу приступил он к делу.

– А я тут при чём? – удивился Вова. – У меня кошелёк на месте.

– В том-то и дело, что у вас кошелёк есть. Чужих в гостинице не бывает, весь обслуживающий персонал проверен, – ответил полицейский. – Значит, кошельки забрал кто-то из жильцов. Придётся устроить у вас обыск.

Тут в комнату постучался, а потом заглянул принц Андуйский.

– Привет, Вова! – воскликнул он. – Собирайся скорее, я тебя заждался.

Потом в дверь ещё кто-то постучал. Через минуту дверь распахнулась, и на пороге появилась леди Хильда.

– Ой, простите, простите, – залепетала она, увидев Вову и полицейского. – Я была уверена, что это моя комната. Ещё раз извините.

Не успела леди Хильда скрыться, как в дверь постучала Лиза.

– Долго мне ещё ждать вашего дурацкого обыска? – сердито спросила она. – Я сюда приехала купаться и загорать, а не в гостинице сидеть.

– Подождите, скоро к вам придём. Но сначала проведём обыск здесь, – решительно произнёс полицейский.

– Зачем? Кажется, я знаю, кто охотится за кошельками, – улыбнулся Вова.

Кто, по мнению Вовы, охотился за кошельками?

Художник Евгений Паненко

Материал подготовил
Илья Иткин

ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ В

Решая эти задачи, можно убедиться, что на разных языках люди не только говорят, но и считают по-разному. Хинди – один из языков Индии. Ягнобский – один из иранских языков, распространён в Таджикистане. Тохарский А – один из древних индоевропейских языков. Древнеяпонский язык – предок современного японского. Все числительные приводятся в латинской транскрипции.

1. Даны два арифметических примера, записанных на языке хинди. Все слова обозначают числа, не большие 5:

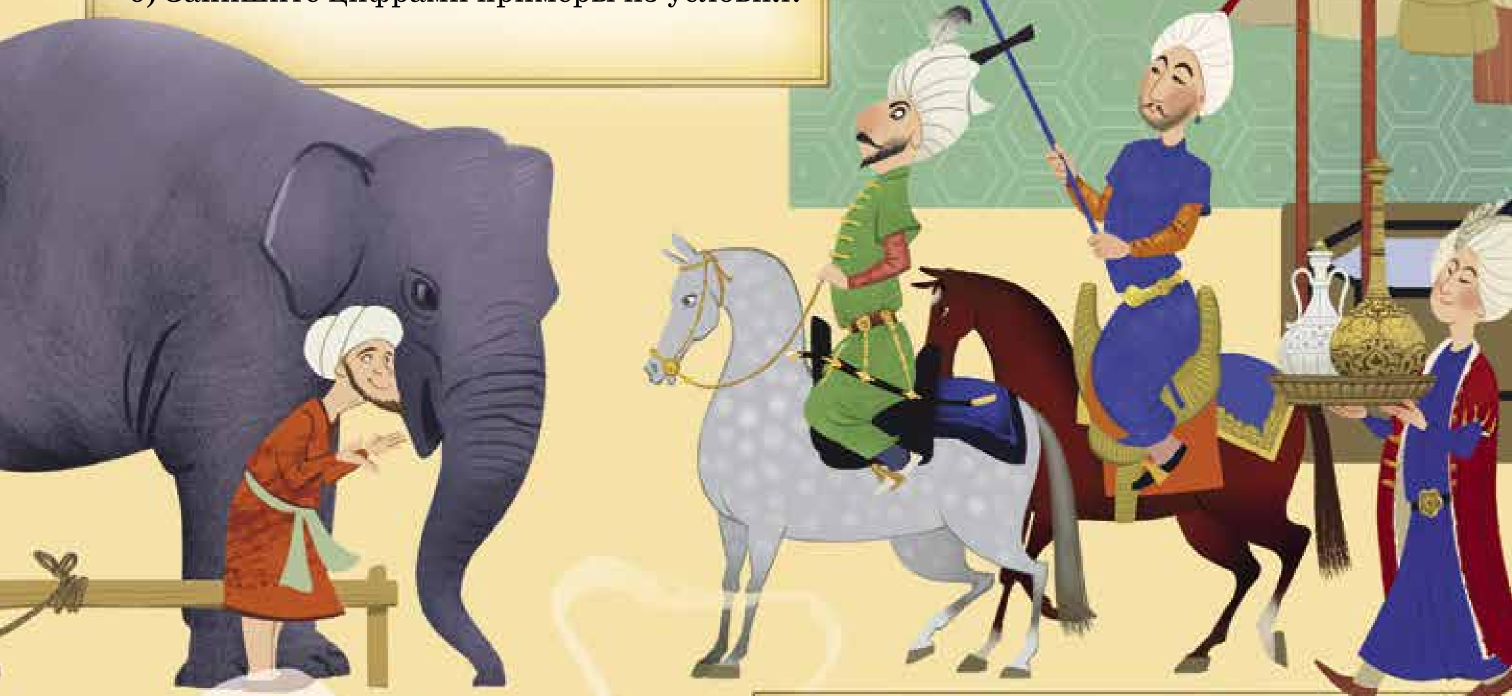
do · *do* = *cār*,   *pā̃c* − *do* = *tīn*.

а) Решите ещё четыре примера и напишите ответы на языке хинди:

ek · *ek* = ?   *śūnya* – *śūnya* = ?

pā̃c − *ek* = ?   *ek* − *śūnya* = ?

б) Запишите цифрами примеры из условия.



2. Даны некоторые числительные на восточном диалекте ягнобского языка:

dū – 2, *tafór* – 4,   *dū nī́ma bīst* – 50,

saráy nī́ma bīst – 70,   *tafór bīst* – 80.

Запишите по-ягнобски: 3; 40; 90.

ЯЗЫКАХ МИРА

Авторы задач: С. И. Переверзева (1),
И. Б. Иткин (2, 3), П. М. Аркадьев, С. А. Бурлак (4)

3. Даны некоторые числительные тохарского А языка:
śtwar – *4*, *päñ* – *5*, *okät* – *8*, *śäk päñ pi* – *15*, *śäk okät pi* – *18*, *śtwarāk päñ pi* – *45*, *pñāk* – *50*, *ṣäptuk* – *70*, *ṣäptuk ṣpät pi* – *77*.

а) Запишите на тохарском А: 7; 10; 14; 40.

б) Запишите цифрами: *oktuk okät pi*.

4. Даны некоторые числительные древнеяпонского языка:

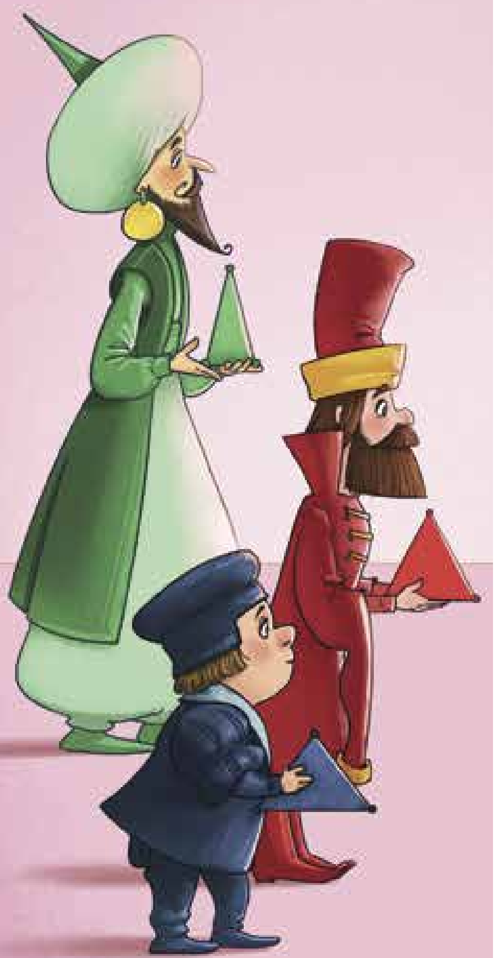
pitötu – *1*, *mitu* – *3*, *jatu* – *8*, *putasoti* – *20*, *jösoti* – *40*.

а) Запишите цифрами: *jötu*, *misoti*.

б) Запишите по-древнеяпонски: 6; 80.

Художник Мария Усеинова

Алексей Панов,
Дмитрий Ал. Панов,
Пётр Панов



ПРОСТРАНСТВО ТРЕУГОЛЬНИКОВ

Окончание. Начало в «Квантике» № 1 и № 2, 2021

А теперь двинемся к границам и полюсам Треугольного Мира. При этом постоянно будем следить за треугольниками, мимо которых проходим.

Точка, где небо касается Земли, – исследователь на границе Мира. «Гравюра Фламмариона», Википедия

РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Особое место в Треугольном Мире занимают равнобедренные треугольники, нанизанные на его экваторы как позвонки (рис. 12).

Определение. *Равнобедренный треугольник – это треугольник с двумя равными сторонами* (рис. 11).

Теорема. *В равнобедренном треугольнике против равных сторон лежат равные углы. Если в треугольнике два угла равны, то против них лежат равные стороны и треугольник равнобедренный.*

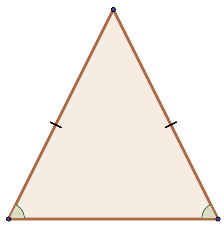


Рис. 11. Равнобедренный треугольник

В НАПРАВЛЕНИИ ГРАНИЦЫ

Что происходит с нарисованными на карте треугольниками по мере приближения к границе (движение вдоль первой стрелки на рисунке 12)?

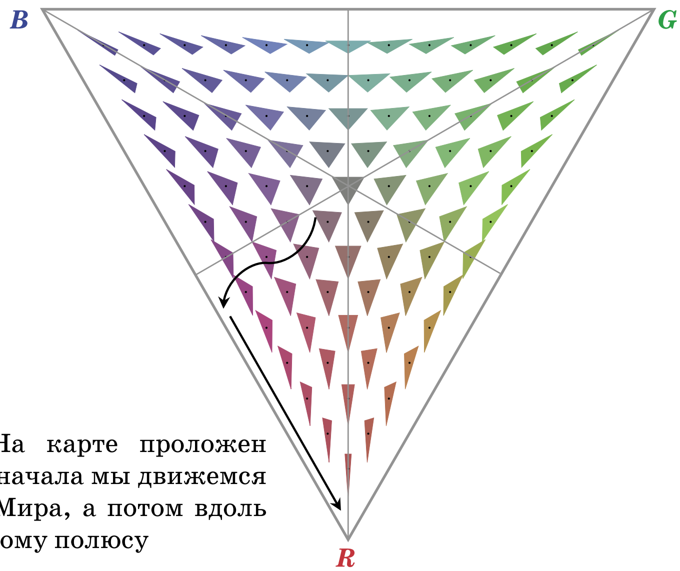


Рис. 12. На карте проложен маршрут: сначала мы движемся к границе Мира, а потом вдоль неё к Красному полюсу

Ответ очевиден: они *сплющиваются* и на самой границе превращаются в отрезок с отмеченной на нём точкой – в *сплюснутый* треугольник (рис. 13).

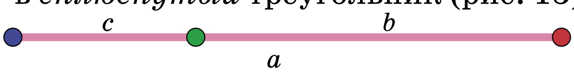


Рис. 13. Сплюснутый треугольник, $a = b + c$

Для сплюснутого треугольника неравенство треугольника превращается в равенство. В нём бо́льшая сторона равна сумме двух других: $a = b + c$.

Упражнение 12. Чему равны углы сплюснутого треугольника на рисунке 13?

УГЛЫ РАВНЫ, РАВНЫ ЛИ СТОРОНЫ?

С теоремой о равнобедренном треугольнике на границе Треугольного Мира нас ждёт сюрприз. Наверное, вы догадались, что у сплюснутого треугольника на рисунке 13 один угол (зелёный) равен 180°, а остальные два – по 0°. Но против этих двух равных нулевых углов лежат две неравные стороны $b \neq c$.

Выходит, вторая часть теоремы неверна? К счастью, математики давно разработали нужную теорию – *анализ бесконечно малых*. На нашем маршруте мы шли мимо треугольников, у которых можно отметить свои синий и красный углы. При подходе к границе и синие, и красные углы постепенно «превращаются» в нулевые, но делают это не одинаково. Вычислив в каждом треугольнике отношение синего угла к красному, мы увидим: пока эти углы ещё не стали нулями,

но уже практически «бесконечно малы», их отношение не отличить от b/c. С этой точки зрения, условно будем считать, что в сплюснутом треугольнике синий и красный углы относятся друг к другу как b/c.

Так бесконечно малые спасают теорему о равнобедренном треугольнике: нулевые углы (рис. 13) не равны друг другу с точки зрения их отношения! Они будут равными лишь для равнобедренного сплюснутого треугольника, где $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{4}$, $c=\frac{1}{4}$.

Упражнение 13. Где расположен этот треугольник на карте (это недалеко от места нашего выхода на границу)?

Но продолжим наш маршрут.

К ПОЛЮСУ ВДОЛЬ ГРАНИЦЫ

По мере приближения к Красному полюсу (вдоль второй стрелки) длины сторон a и b выравниваются, сторона c уменьшается, а две вершины сплюснутого треугольника (зелёная и синяя) сближаются (рис. 12). В итоге полюс предстаёт перед нами равнобедренным треугольником со сторонами $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$, $c=0$.

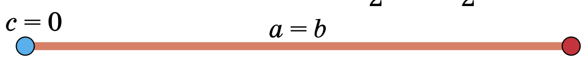


Рис. 14. Треугольник, представляющий Красный полюс

Угол между a и b равен 0°. А два других угла?

ТАЙНА КРАСНОГО ПОЛЮСА

Мы зашли в Красный полюс вдоль границы Треугольного Мира. Все треугольники, мимо которых мы проходили, были сплюснутыми и все имели углы 0°, 180° и 0°. Менялись только длины их сторон. С этой точки зрения углы полюсного сплюснутого треугольника (рис. 14) тоже должны быть 180°, 0° и 0°.

Но если входить в Красный полюс вдоль экватора, то у полюсного треугольника стороны будут те же самые $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0, а вот углы будут 90°, 90° и 0°. Тот же треугольник с углами 90°, 90° и 0° мы получим, входя в полюс вдоль меридиана, соответствующего 90°.

И вообще, входя вдоль меридиана, отвечающего углу $\alpha°$, мы увидим на полюсе треугольник со сторонами $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$, 0 и углами $\alpha°$, $180°-\alpha°$, 0°. Значит, мы не можем приписать двум нашим углам какие-то определённые значения, а получаем на Красном полюсе целое семейство сплюснутых треугольников (рис. 15). И то же самое – на остальных полюсах.

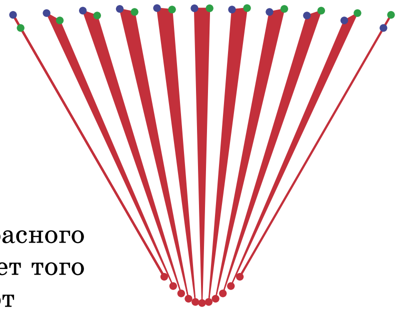


Рис. 15. Треугольники вблизи Красного полюса, вершины окрашены в цвет того полюса, на который они указывают

НА ПОЛЮСЕ: СТОРОНЫ РАВНЫ, УГЛЫ НЕТ

Итак, Красный полюс вмещает целое семейство треугольников с равными сторонами $a = b = \frac{1}{2}$, углы против которых не равны между собой. И неверна первая часть теоремы о равнобедренном треугольнике.

В этот раз мы спасём теорему, применив другой математический трюк: превратим её в определение.

Определение. *Треугольник – равнобедренный, если в нём есть две равные стороны и два равных угла, причём равные углы лежат против равных сторон, а равные стороны – против равных углов.*

Замечание. Среди сплюснутых треугольников есть два типа равнобедренных – с двумя углами $0°$ и с двумя углами $90°$. Равнобедренные треугольники второго типа расположены в полюсах Треугольного Мира.

Упражнение 14. С помощью нашего нового Определения равнобедренного треугольника докажите ранее сформулированную Теорему о равнобедренном треугольнике.

Наше путешествие завершено, но история Треугольного Мира на этом не заканчивается.

ПОСЛЕСЛОВИЕ: ТРЕУГОЛЬНЫЙ МИР II

Треугольный Мир возник благодаря нескольким измерениям внутри правильного треугольника.

Предлагаем вам провести новую серию измерений. Нарисуйте любой треугольник. Измерьте транспортиром его углы α, β, γ и вычислите их сумму $\alpha + \beta + \gamma$. Сделайте пять экспериментов, рисуя каждый раз новый треугольник, и заполните журнал измерений. Вы получите удивительный результат! Попробуйте на его основе построить новый Треугольный Мир II.

Журнал измерений

№	α	β	γ	$\alpha + \beta + \gamma$
1				
2				
3				
4				
5				

Художник Мария Усеинова

Илья Сиротовский,
Александр Шкловер

СГИБАНИЯ БУМАГИ

История вторая. УГЛЫ

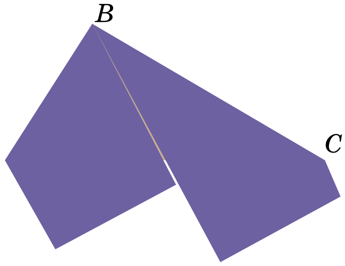
Историю первую см. в «Квантике» № 1, 2021

– А мы сегодня доказали первую теорему. На геометрии. Что биссектрисы смежных углов перпендикулярны. – Степан был очень доволен, что смог с первого раза выговорить слово «перпендикулярны».

– Здорово! – улыбнулась Полина. И как по волшебству у неё в руках оказался бумажный прямоугольник.

Полина загнула его дважды, совместив края.

– Вот так. – Сестра протянула брату уже согнутую фигуру.



– Чему равен угол ABC?

– Опять ты за своё! Ладно, давай поймём. Сгибать-то по-разному можно?

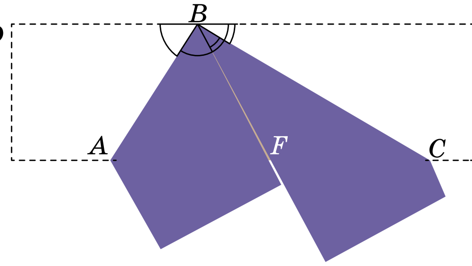
– Ага, лишь бы стороны друг к другу прикладывались.

– Снова что ли всегда одно и то же получится? – Стёпа достал из пенала транспортир. Вскоре он обнаружил, что всегда получается прямой угол.

– Почему так? – Он всё вертел в руках бумажную полоску. – Не понимаю.

– Попробуй поразгибать листок и поотмечать равные уголки, – посоветовала Полина.

Через несколько минут в руках брата был изрисованный листок.



– Я понял! Углы же одинаковые! Когда мы сгибаем, углы накладываются. Значит, углы *DBA* и *ABF* равны. И равны углы *FBC* и *CBE*. Вместе все четыре угла дают развёрнутый, а наши два – как раз его половина, то есть 90°.

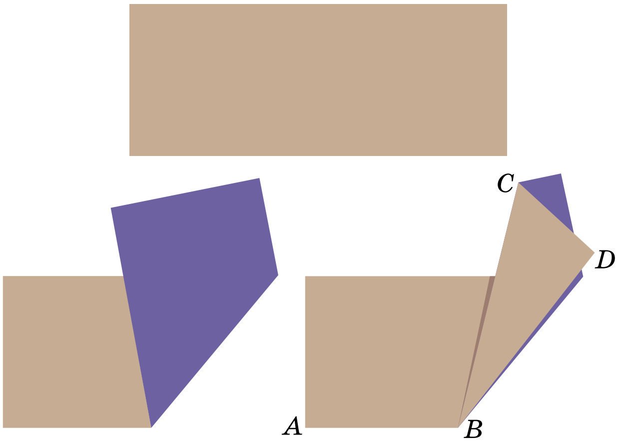
Чай заварился, и брат с сестрой наслаждались брусничным пирогом.

Неожиданно Степан крикнул:

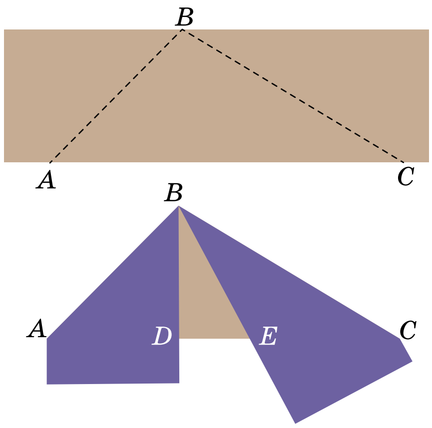
– Так это же и есть наша теорема! Углы *DBF* и *FBE* смежные, а линии сгиба – как раз биссектрисы этих углов.

– Я всё думала, когда ты догадаешься, – улыбнулась Полина. – Вот тебе ещё «на подумать».

Задача 1 (*Полина Гричкова, 7 кл*). Полоску бумаги согнули, как на рисунке. Угол *ABC* равен 120°. Найдите угол *CBD*.

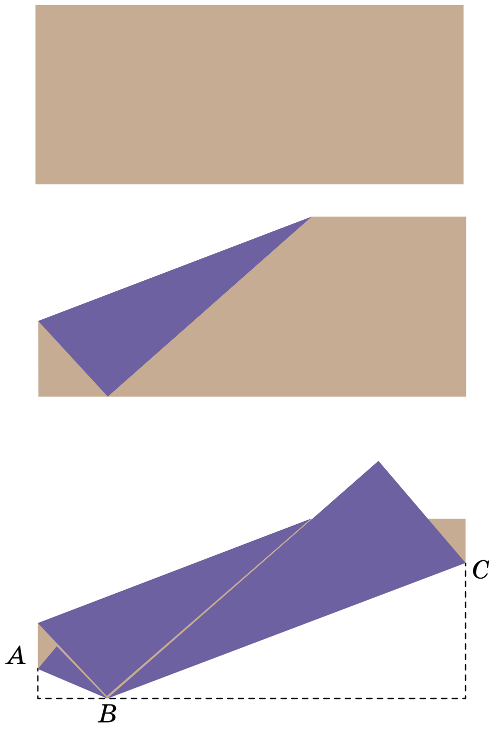


Задача 2. Полоску бумаги согнули по сторонам угла *ABC*, как на рисунке. Найдите угол *DBE*, если угол *ABC* равен а) 100°; б) 90°; в) 70°.

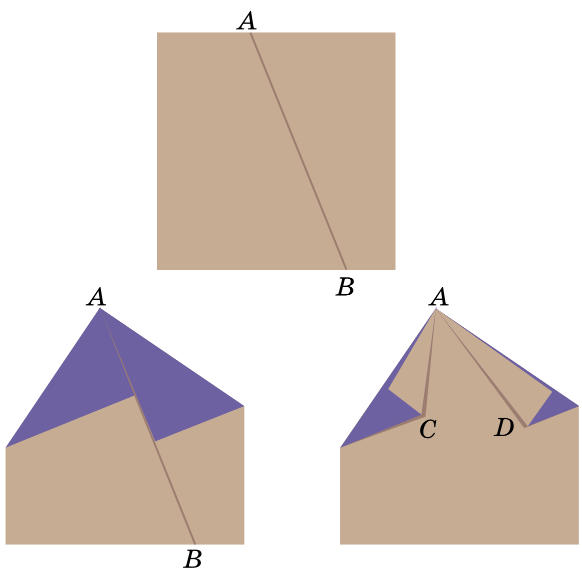


Странички для маленьких

Задача 3. Прямоугольную полоску бумаги согнули как на рисунке. Найдите угол ABC.



Задача 4. Согните квадратный листок бумаги так, как на рисунке, выбрав любой отрезок AB (точки A и B не совпадают с вершинами квадрата). Найдите угол CAD.



Художник Екатерина Ладатко

Григорий Гальперин

Выкуп принцессы

Змей Горыныч украл принцессу и потребовал за неё выкуп – заранее неизвестное число крупных и редких самоцветов. Три рыцаря, братья принцессы, собрали у себя кто сколько смог самоцветов, положили их в свои шкатулки и поехали выкупать сестру-принцессу. На аудиенции у Змея Горыныча братья выставили свои три шкатулки на обозрение.

Когда первый рыцарь открыл свою шкатулку, Змей Горыныч прорычал, извергая огонь: «Не хватает 30 самоцветов!» Второму рыцарю Змей Горыныч объявил, что в его шкатулке не хватает 40 самоцветов, а третьему, самому младшему брату, – что в его шкатулке не хватает 50 самоцветов для выкупа. «Даже всех самоцветов в любых двух ваших шкатулках не хватит для выкупа!» – заявил сердито Змей Горыныч. «Ну а всех наших самоцветов в трёх шкатулках вместе – хватит?» «Пожалуй, что да, хватит», – добавил Горыныч и вдруг подобрел: «Я вам даже верну все лишние самоцветы обратно!»

И вот принцесса благополучно вырвалась из рук Змея Горыныча, да ещё и принесла братьям обещанные Горынычем лишние самоцветы, разложив их поровну в 7 одинаковых мешочков!

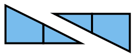
Каков же был Змей-Горынычевский выкуп? Сколько самоцветов внёс каждый брат? И сколько самоцветов было в каждом мешочке?

Художник Ольга Демидова

Владимир Красноухов

ПАРКЕТ ХУДОЖНИКА-АВАНГАРДИСТА, или (1/2 + 1/2)-*ДОМИНО*

Возьмём фигуру с известным названием домино (рис. 1) и разрежем её по диагонали на два треугольника (рис. 2). Соединим эти треугольники (с возможностью их поворачивания и переворачивания) сторонами исходных квадратов. Исчерпывающий набор полученных элементов составляет 11 штук (рис. 3). Площадь каждого элемента – 2 квадрата, общая площадь элементов в наборе – 22 квадрата.

Рис. 1  Рис. 2 

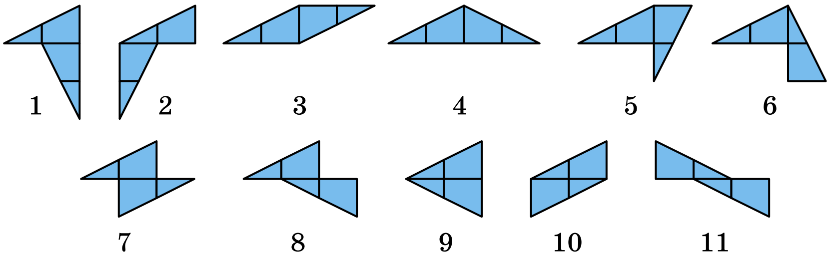


Рис. 3

Чем же интересен этот набор, который можно условно назвать (1/2 + 1/2)-домино? На первый взгляд, это набор каких-то «колючек», малопригодных для составления красивых геометрических фигур.

Тем не менее, очистим элементы от строительной сетки (рис. 4) и попробуем построить из них какие-то связные фигуры, скажем, приведённые на рисунке 5.

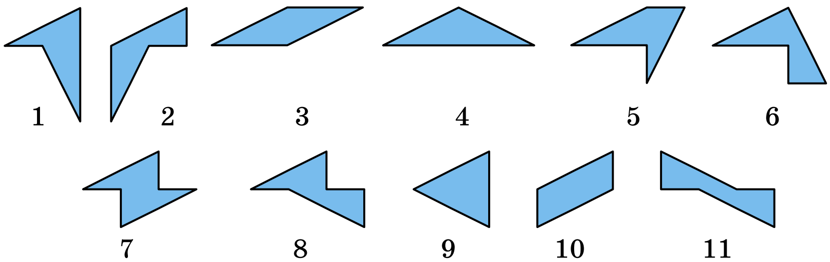
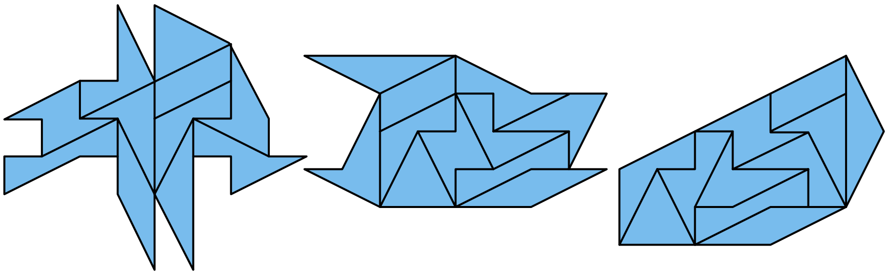


Рис. 4

Мы расположили фигуры так, что они приобретают всё более компактный вид. Из фигур с данной площадью более компактной естественно считать фигуру с меньшим периметром. Если у фигуры есть дырки, мы учитываем и периметры «дырок».

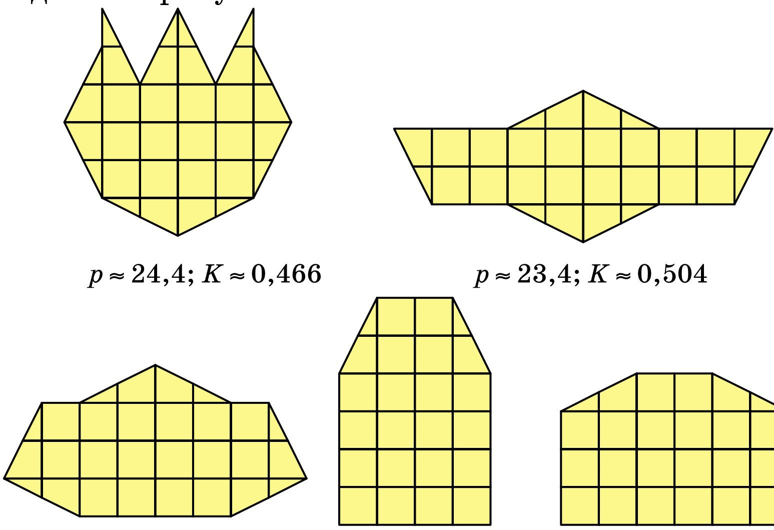
Для знатоков. Чтобы показатель компактности не зависел от того, в каких единицах мы измеряем длины, можно вместо периметра p измерять безразмерную величину $\frac{S}{p^2}$. Далее для разных фигур приведены и периметр, и значение «коэффициента компактности» $K = 4\pi\frac{S}{p^2}$. Множитель 4π добавлен для того, чтобы у самой компактной фигуры, круга, коэффициент был 1. У других фигур он меньше: например, для квадрата $K \approx 0{,}785$, для правильного шестиугольника $K \approx$ $\approx 0{,}907$, а для «очень некомпактного» прямоугольника с соотношением сторон 1 : 10000 имеем $K \approx 0{,}0003$.



$p \approx 37{,}9$; $K \approx 0{,}193$ $p \approx 25{,}4$; $K \approx 0{,}428$ $p \approx 19{,}4$; $K \approx 0{,}733$

Рис. 5

1. Задача для разминки. Используя весь набор элементов, соберите фигуры, силуэты которых приведены на рисунке 6.



$p \approx 24{,}4$; $K \approx 0{,}466$ $p \approx 23{,}4$; $K \approx 0{,}504$

$p \approx 19{,}4$; $K \approx 0{,}733$ $p \approx 18{,}5$; $K \approx 0{,}81$ $p \approx 18{,}5$; $K \approx 0{,}81$

Рис. 6

2. Соберите более компактную фигуру, чем приведённые на рисунке 6.

3. Можно ли замостить плоскость, используя каждый элемент набора бесконечное число раз?

Желаем успехов!

Художник Екатерина Соловей

НАШ КОНКУРС, V тур («Квантик» № 1, 2021)

21. *Слот-машина устроена так: нажимаешь на рычаг, а она случайно выбирает цифру от* 0 *до* 9 *на каждом из трёх барабанов. Если выпали три одинаковые цифры, машина выдаёт* 5000 *рублей, нажатие на рычаг стоит* 100 *рублей. Но машина сломалась: после выпадения* 000 *цифры на первом барабане стали выпадать по циклу через* 1 (0, 2, 4, 6, 8, 0, 2, ...), *на втором – через* 2 (0, 3, 6, 9, 2, ...), *на третьем – через* 3 (0, 4, 8, 2, ...). *Выгодно ли это фирме, поставившей машину?*

Ответ: невыгодно. После 000 на первом и третьем барабанах будет выпадать 0 каждые 5 нажатий на рычаг, а на втором – каждые 10. Значит, выигрыш будет выпадать как минимум каждые 10 нажатий. За эти 10 нажатий фирма получает $100 \cdot 10 = 1000$ руб., а отдаёт 5000. До поломки выигрыш выпадал раз в 100 нажатий, и фирма, отдавая 5000, получала $100 \cdot 100 = 10000$ руб.

22. *а) В дачном посёлке* 36 *домиков, соединённых дорожками (рис.* 1*). Длина каждой дорожки* 100 *м. Когда в домике заводят кошку, мыши убегают из него и из всех домиков, до которых от него не более* 200 *м (длина пути считается вдоль дорожек). В каком наименьшем количестве домиков надо завести кошек, чтобы мыши полностью покинули посёлок?*
б) Решите ту же задачу, если домиков 38 *и они расположены как на рисунке* 2.

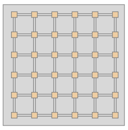


Рис. 1

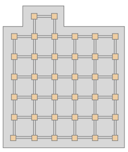
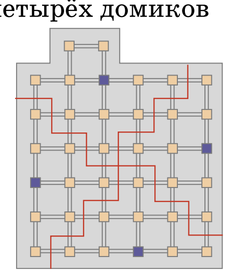


Рис. 2

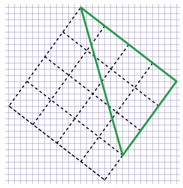
Ответ: а) 4; б) 4. Рассмотрим четыре домика в углах «большого квадрата» $500\,\text{м} \times 500\,\text{м}$. Кошка ни из какого домика не может «достать» одновременно до двух из этих четырёх домиков (ведь радиус действия кошки не более 200 м). А четырёх кошек для изгнания мышей из всех домиков хватит, см. рисунок (домики с кошками отмечены синим, красные линии разделяют «зоны ответственности» разных кошек).



23. *Рома суммировал подряд идущие натуральные числа, начиная с* 1, *а Поля умножала подряд идущие натуральные числа, тоже начиная с* 1. *Среди сумм Ромы и произведений Поли есть равные числа, например:* $1+2+3=1\cdot 2\cdot 3$. *А может ли ещё какая-то сумма у Ромы оказаться равной какому-то произведению у Поли?*

Ответ: да, $1+2+3+\ldots+15=1\cdot 2\cdot 3\cdot 4\cdot 5=120$.

24. *Нетрудно нарисовать на клетчатой бумаге треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах – например, прямоугольный треугольник со сторонами* 3, 4, 5. *А можно ли нарисовать треугольник с целочисленными длинами сторон и вершинами в узлах так, чтобы ни одна его сторона не проходила по линиям сетки?*



Ответ: можно, см. пример на рисунке.

25. *Требуется записать по кругу все натуральные числа от* 1 *до* n *в таком порядке, чтобы сумма любых двух соседних чисел была простым числом. Можно ли это сделать, если: а)* $n=2021$; *б)* $n=2022$?

Ответы: а) нельзя; б) можно.

а) Убедимся, что при любой расстановке чисел от 1 до 2021 по кругу найдутся два соседних числа, дающих в сумме составное число.

Достаточно найти соседние нечётные числа (их сумма не меньше $1+3=4$ и чётна, такое число составное). Но у нас 1011 нечётных чисел, а чётных 1010 – меньше, поэтому за каким-то нечётным числом по часовой стрелке стоит нечётное.

б) Заметим, что 2027 и 2029 – простые числа, отличающиеся на 2 (их называют «близнецами»). Напишем по кругу по часовой стрелке в порядке возрастания нечётные числа от 5 до 2021, а между ними напишем по часовой стрелке в порядке убывания чётные числа от 2022 до 6 (легко убедиться, что этих чётных и нечётных чисел поровну). Получится такая «цепочка»:

5 2022 7 2020 9 2018 ... 2019 8 2021 6

В этой цепочке сумма каждых двух соседних чисел попеременно равна то 2027, то 2029 – то есть простым числам. И мы использовали все натуральные числа от 5 до 2022. Осталось как-то втиснуть числа от 1 до 4 между крайними числами цепочки (то есть, 5 и 6), дабы «круг замкнулся». Это несложно: ... 5 2 3 4 1 6 ...

ЛЮБОЙ НЕ ВСЯКИЙ («Квантик» № 2, 2021)

Кузькин признак делимости выполняется по той причине, что двузначное число, у которого сумма квадратов цифр равна 10 – это либо 13, либо 31. Оба этих числа – делители 403.

Два последовательных квантора «для любого» можно переставлять, когда переменные, задаваемые этими кванторами, принадлежат независимым множествам. Кузькина фраза «В любом подвале у каждой мыши есть запасы сыра» относится к воображаемому «идеальному» миру, населённому «правильными» мышами. В нашем представлении мышь любит сыр и готова делать запасы сыра; поэтому мы готовы согласиться с этой фразой, считая, что в идеальном мире мыши так и поступают. Но фраза содержит подтекст, не присущий стандартным математическим формулировкам: на самом деле мы интерпретируем её не как фразу «Для любого подвала и для любой мыши верно, что...», а как «Для любого подвала и для каждой мыши в этом подвале верно, что...». То есть объект, управляемый вторым квантором, выбирается из множества, определяемого объектом первого квантора. После перестановки мы теряем эту связь, и фразу «У каждой мыши в любом подвале есть запасы сыра» понимаем как «Для совершенно любой мыши и любого подвала верно, что...». То есть подтасовка в том, что подвал теперь уже не связан с мышью, и первый квантор выбирает мышь из множества всех мышей, в том числе, не имеющих отношения к упомянутому далее подвалу. Поэтому Кузькины действия нельзя называть перестановкой кванторов.

СНЕГ, ЛЁД, ВОДА И ЛЫЖИ

(«Квантик» № 2, 2021)

1. Нужно как можно более охлаждённый снег положить в термос. Лучше ещё и в одеяло закутать для надёжности. И тепло, и холод можно сохранять одними и теми же способами.

2. В воздухе всегда есть немного водяного пара. Но количество пара, которое в него «помещается», зависит от температуры. В холодный воздух пара «влезает» меньше. Поэтому при остывании воздуха (например, вечером) лишний пар «осаждается» – летом он превращается в капли жидкости, и выпадает роса, а зимой – жидкость замерзает, превращаясь в инеей. Загадочные узоры получаются из-за формы кристалла льда. На шершавой стене это незаметно, кристаллы прилепляются к её неровностям как попало, а на гладкой поверхности они пристраиваются друг к другу как кусочки пазла. Если воздух между рамами влажный, пар из него осаждается на внешнее, более холодное, стекло. К сожалению, в современных стеклопакетах слишком хорошая изоляция, и влага на внешнее стекло не попадает, а внутреннее слишком тёплое, чтобы на нём образовывались узоры.

Мы всегда выдыхаем влажный воздух, примесь пара в нём не зависит от времени года. Этот пар невидим, он прозрачен, как и воздух. Но на холоде этот пар, попав «на улицу», сразу конденсируется и превращается в малюсенькие капельки воды. Их-то мы и видим как белое облачко при выдохе – свет рассеивается на многочисленных отражениях и преломлениях на границах капелек.

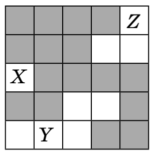
3. С наступлением холодов первыми замерзают мелкие ручейки, которыми «кормятся» большие водоёмы. Приток воды резко падает. А сток воды в большей реке и даже испарение с поверхности большого озера – спадает медленнее. Вот уровень воды и успевает понизиться.

И, конечно, падение уровня зимой заметнее по сравнению с уровнем осенью в сезон дождей, чем, например, с уровнем летом в засуху.

4. Смола – гидрофобная, «боится воды». В тёплую погоду, когда снег влажный, очень тонкий слой воды «приставал» к несмазанному дереву, к этой воде прилипал снег, всё это замерзало и получался подлип – на лыже образовывался слой льда и снега, иногда такой толстый, что не то что ехать, а даже идти нельзя. Смола не давала воде «пристать» к лыже, отталкивала её. У пластиковых лыж подлип куда меньше – пластик отталкивает воду намного лучше деревяшки – но тоже бывает. Чтобы избежать его и улучшить скольжение, поверхность лыж покрывают парафином. Его, кстати, тоже расплавляют на лыже, чтоб впитался в пластик – но уже не горелкой, а не слишком горячим утюгом; открытый огонь пластику вреден.

LXXXVII САНКТ-ПЕТЕРБУРГСКАЯ ОЛИМПИАДА ПО МАТЕМАТИКЕ

(«Квантик» № 2, 2021)



1. Пример показан на рисунке.

2. Ответ: не может. Если *А* – исповедник, то *Ц* сказал правду, значит, *Ц* – Фуфелий. Но тогда обращённая к нему фраза монаха *Б* «Фуфелий – инквизитор» невозможна: если *Ц* – действительно инквизитор, то она будет истинной, а если *Ц* – исповедник, то она будет ложной, оба варианта противоречат «правилам игры».

Случай «*А* – инквизитор» возможен.

3. Ответ: 2000 квадратиков. Каждая фигурка, кроме квадратика, задевает пять рядов, а квадратик задевает четыре ряда. Всего на доске 10 000 фигурок, если бы все фигурки задевали по пять рядов, то сумма чисел была бы равна 50 000. Но на самом деле сумма равна 48 000, значит, 2000 фигурок задевают не пять рядов, а четыре. Эти 2000 фигурок и есть квадратики.

4. Ответ: наименьшее a равно 1357. Пусть один из делителей – это a/k, а другой $(a+1)/m$.

Если $k=1$, $m=1$, то $2036=a+a+1$, откуда $a=1\,017\frac{1}{2}$, то есть нецелое. Значит, этот случай невозможен. Поэтому хотя бы одно из чисел k, m (а может быть, даже оба) больше 1.

Пусть $k\geqslant 2$. Тогда

$$2036=\frac{a}{k}+\frac{a+1}{m}\leqslant\frac{a}{2}+\frac{a+1}{1}=\frac{3a+2}{2},$$

откуда $4072\leqslant 3a+2$, то есть $a\geqslant 1356\frac{2}{3}$.

Поскольку a – натуральное, то $a\geqslant 1357$.

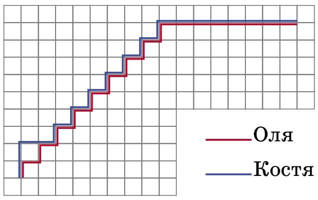
Если же $m\geqslant 2$, то опять $a\geqslant 1357$, поскольку

$$2036=\frac{a}{k}+\frac{a+1}{m}\leqslant\frac{a}{1}+\frac{a+1}{2}=\frac{3a+1}{2}.$$

Вариант $a=1357$ при $k=1$, $m=2$ действительно даёт нужное равенство:

$$1357+\frac{1358}{2}=1357+679=2036.$$

5. Ответ: да. Например, пусть маршрут Оли – «лесенка»: выходим с перекрёстка, направо, налево, направо, налево, ..., направо, налево, направо, а потом всё время прямо. Маршрут Кости отличается лишь первыми тремя шагами: они будут прямо, направо, прямо. Тогда после первого перекрёстка Костя и Оля обошли с разных сторон один и тот же квартал, а дальше двигались одинаково.

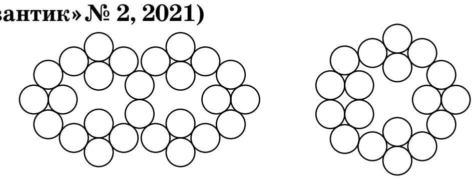


6. Фермер добьётся цели, если каждая свинья будет весить целое число килограммов, либо если каждая свинья будет весить полуцелое число килограммов (на 0,5 кг больше целого).

Пусть фермер сначала докормит каждую свинью до ближайшего целого или полуцелого веса; на это уйдёт менее $0{,}5\cdot 35=17{,}5$ кг корма. Если при этом свиней с полуцелым весом окажется не более 17, то оставшегося корма (более 8,5 кг) хватит докормить их до целого веса. Если же таких свиней хотя бы 18, то свиней с целым весом будет не более $35-18=17$, и можно их докормить до полуцелого веса.

МОНЕТЫ С ТРЕМЯ КАСАНИЯМИ

(«Квантик» № 2, 2021)



МОНЕТЫ ГЕРМАНСКОГО ГЕРЦОГСТВА

На всех пфеннигах (Pfennig(e)) и грошах (Groschen) есть основной номинал (в центре) и дополнительный (по кругу). У пфеннигов дополнительный номинал выражен в грошах, у грошей – в талерах (Thaler). Когда величина основного номинала увеличивается, величина дополнительного во столько же раз уменьшается:

1 PFENNIG = 10 EINEN GROSCHEN
2 PFENNIGE = 5 EINEN GROSCHEN
1/2 GROSCHEN = 60 EINEN THALER
1 GROSCHEN = 30 EINEN THALER
2 GROSCHEN = 15 EINEN THALER

Тем самым, ясно, что «X einen что-то» – это $1/X$ этого чего-то. Поэтому **в гроше 10 пфеннигов, а в талере 30 грошей**.

Медные два пфеннига весят в два раза больше, чем один пфенниг. С серебряными монетами надо учитывать пробу: умножая долю серебра на вес монет, получаем, что **в грошевых монетах на 1 грош приходится 0,4875 граммов чистого серебра** (тут особенно интересны две монеты в 2 гроша – разной пробы и разного веса, но с сохранением этого соотношения).

С высокопробными талеровыми монетами всё немного сложнее.

6 EINEN THALER (1/6 талера) =
= 84 EINE F. MARK (1/84 марки)

EIN THALER = XIV EINE F. M. (1/14 марки?)

EIN VEREINSTHALER =
= XXX EIN PFUND FEIN (1/30 фунта?)
2 THALER (2 талера) =
= VII EINE F. MARK (1/7 марки?) =
= $3\frac{1}{2}$ GULDEN ($3\frac{1}{2}$ гульдена).

Исходя из монет в 1/6 и 2 талера, в **одном талере должно быть 16,71 граммов серебра.** Поэтому ясно, что Ein Thaler и Ein Vereinsthaler – это один талер (опять заметим, что соотношение веса и пробы сохраняет количество серебра в монете; кстати, на двухталеровой монете тоже есть слово vereins, поэтому оно не должно нас смущать). Поэтому **в талере 1,75 гульдена, в марке 14 талеров, а в фунте 30 талеров**.

Противоречие состоит в том, что **содержание серебра в талеровых монетах не соответствует содержанию серебра в грошевых монетах** (в талеровой монете на грош приходится 0,556 граммов серебра). Так часто бывало: монеты крупных номиналов содержали ровно столько драгоценного металла, сколько декларировалось, а разменные монеты – меньше и обращались по принудительному курсу, подобно медным монетам. Для сплава, содержащего меньше 50% серебра, есть специальное название – *биллон*.

КРАЖА НА КУРОРТЕ

• Вова заранее положил в карман туза, двойку, четвёрку, восьмёрку и валета. Отсутствие пяти карт в колоде трудно заметить даже опытному картёжнику. Потом Вова положил на них колоду. Зная порядок спрятанных карт, из них легко составить любую сумму от 1 до 25.

• Вова заподозрил в охоте за кошельками леди Хильду. Если она была уверена, что заходит в свою комнату, то зачем же стучала в дверь?

ЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ В ЯЗЫКАХ МИРА

1. Для первого примера из условия подходит только вариант **2 · 2 = 4** (звуковое сходство между русскими числительными и числительными хинди не случайно: русский и хинди – родственные языки). Из этого сразу следует, что первый пример задания 2 – это 1 · 1 = 1, то есть *ek* · *ek* = **ek** (произведения, большие 4, мы записать не сможем, а если *ek* – это «0», не решается пример *ek* – *śūnya*). В таком случае второй пример из условия – это **5 – 2 = 3**. Соответственно, *pā̃c* – *ek* = **cār** (то есть 5 – 1 = 4). Понятно, что *śūnya* – *śūnya* = 0, а записать ответ на хинди мы можем только в том случае, если **śūnya** – это и есть «0». Стало быть, *ek* – *śūnya* = **ek** (1 – 0 = 1).

2. Начнём с числительного *tafór bīst* «80». Мы знаем, что *tafór* – это «4»; самый простой способ обозначить 80, используя четвёрку, – конечно, 4 · 20. Отсюда «50» буквально "2 *nī́ma* 20", значит, *nī́ma* – это что-то вроде «с половиной». Тогда «70» обозначается как 3,5 · 20, и мы можем выполнить задание: 3 – **saráy**; 40 (2 · 20) – **dū bīst**; 90 (4,5 · 20) – **tafór nī́ma bīst**.

3. Ничего совсем уж необычного в тохарской А системе счёта нет, надо только учесть две вещи: во-первых, на конце двузначных не круглых числительных пишется частичка *pi*; во-вторых, названия десятков похожи на названия соответствующих единиц – хотя они и не выводятся из единиц по общему для всех случаев правилу, но, по крайней мере, начинаются с той же буквы (*päñ* – «5» ~ *pñāk* – «50» и т.д.). Тогда:

а) 7 – **ṣpät** (из «77»), 10 – **śäk** (из «15» и «18»), 14 – **śäk śtwar pi**, 40 – **śtwarāk** (из «45»).

б) Поскольку *okät* – это «8», *oktuk*, соответственно, – «80». Значит, *oktuk okät pi* – **88**.

4. Названия единиц заканчиваются на *-tu*, названия десятков – на *-soti*. Основа при переходе от единиц к десяткам, видимо, не меняется. Эти наблюдения позволяют нам без труда записать три контрольных примера из четырёх: *jötu* – **4**, *misoti* – **30**, 80 – **jasoti**. Но откуда же мы можем узнать, как будет «6»? Обратим внимание, что основы некоторых числительных, приведённых в задаче, похожи друг на друга: *pitö-* «1» ~ *puta-* «2», *jö-* «4» ~ *ja-* «8».

Можно заметить, что эти сходства не произвольны. Чтобы получить из некоторого числительного в два раза большее, нужно заменить в нём гласные: *i* на *u*, *ö* на *a*. Проделав эту операцию с числительным *mitu* «3», получаем, что «6» по-древнеяпонски **mutu**.

СГИБАНИЯ БУМАГИ.

История вторая. Углы.

1. Ответ: 20°. **2. Ответы:** а) 20°; б) 0°; в) 40°. **3. Ответ:** 135°. **4. Ответ:** 45°.

ВЫКУП ПРИНЦЕССЫ

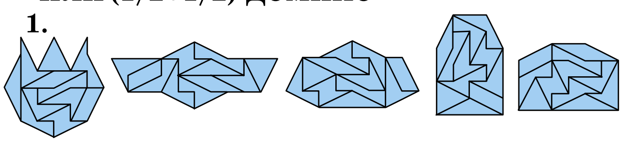
Ответ: в выкупе 67 самоцветов; братья внесли 37, 27 и 17; в мешочках по 2 самоцвета.

Пусть в выкупе x самоцветов. Тогда в шкатулках их было $x-30$, $x-40$ и $x-50$. Эти числа положительные, откуда $x > 50$. Но даже в двух самых больших шкатулках не хватит самоцветов для выкупа, поэтому $2x-70<x$, то есть $x<70$.

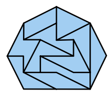
А всех самоцветов уже хватает, поэтому $3x-120 \geqslant x$, откуда $x \geqslant 60$. Итак, выкуп – это число от 60 до 69. Какое же? Вспомним, что возвращённые самоцветы удалось разложить поровну в 7 мешочков, то есть число $(3x-120)-$ $-x = 2(x-60)$ кратно 7. Среди 10 возможных ответов годится ровно один: $x = 67$, когда Змей вернул 14 самоцветов, откуда получаем ответ.

ПАРКЕТ ХУДОЖНИКА-АВАНГАРДИСТА, ИЛИ (1/2+1/2)-ДОМИНО

1.

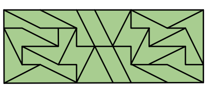


2. См. пример справа. Этот семиугольник получился даже компактнее правильного шестиугольника.



$K = 0{,}911$

3. Из двух наборов собирается прямоугольник, а прямоугольниками легко замостить плоскость.



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Второй этап состоит из четырёх туров (с V по VIII) и идёт с января по апрель.

Высылайте решения задач VII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 апреля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

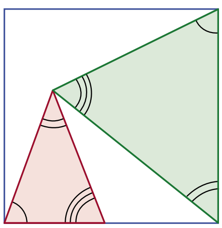
Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

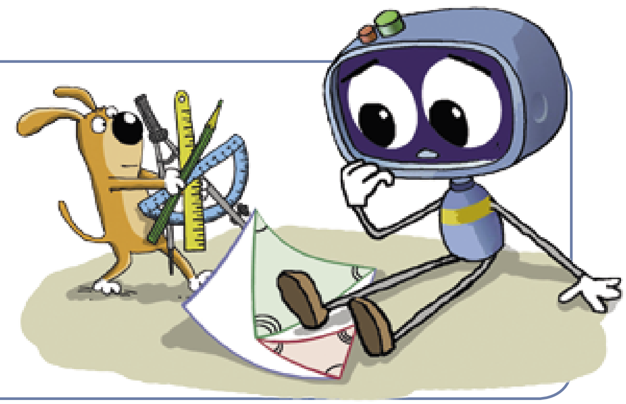
VII ТУР

	7	2		6		
		4				
		1				
		3		5		

31. Любознательный жук сидит в клетке под номером 1. Он умеет переползать только в клетку, соседнюю по стороне, и хочет обойти числа от 2 до 7 в порядке возрастания. При этом он не хочет посещать никакую клетку больше одного раза. Помогите ему построить подходящий маршрут.

32. Квантик расположил в квадрате два треугольника с одинаковым набором углов, как схематично показано на рисунке. Угол какой величины обязательно встретится среди углов этих треугольников?

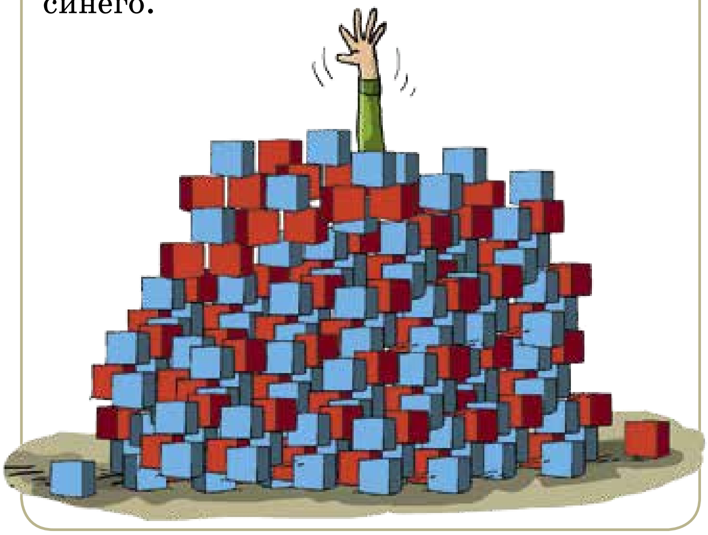


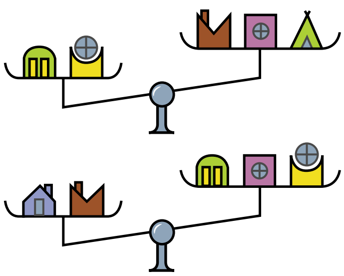


Авторы: Георгий Караваев (31, 35), Егор Бакаев (32), Алексей Толпыго (33), Сергей Дворянинов (34)

33. Число N обладает таким свойством: если в нём вычеркнуть несколько цифр (одну или больше, но чтобы что-то осталось), то всегда получается простое число или 1. Какое наибольшее число знаков может иметь N?

34. Из тысячи красных и синих кубиков $1\times1\times1$ сложили куб $10\times10\times10$. Чтобы кубики не перепачкались свежей краской, между соседними кубиками разного цвета вставляли тонкий изолирующий квадратик. Оказалось, что изолирующих квадратиков нечётное количество. Докажите, что на поверхности куба не может быть поровну красного и синего.





35. Толя нашёл 6 игрушечных домиков из старого конструктора. Он точно помнит, что эти домики весят 10, 20, 30, 40, 50 и 60 граммов, но не помнит, какой именно домик сколько весит. Он дважды взвесил домики на правильных весах так, как показано на рисунке выше. Вес каких домиков он может определить однозначно?

Художник Николай Крутиков

ЛИНЗА ИЗ ЛУНЫ

Представьте, что Луну заменили на линзу такого же диаметра, чтобы во времена солнечных затмений она фокусировала свет на поверхность Земли. Почему в этой ситуации такой «луч смерти» не представляет особой опасности?

Автор Александр Бердников

Художник Алексей Вайнер

ISSN 2227-7986 21003

9 772227 798213