№ 8 | август 2020

ЖУРНАЛ КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Издаётся Московским Центром непрерывного математического образования

№ 8
август
2020

ПРЯМОЕ НА КРИВОМ

ПРО ВАРЕНЬЕ

КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

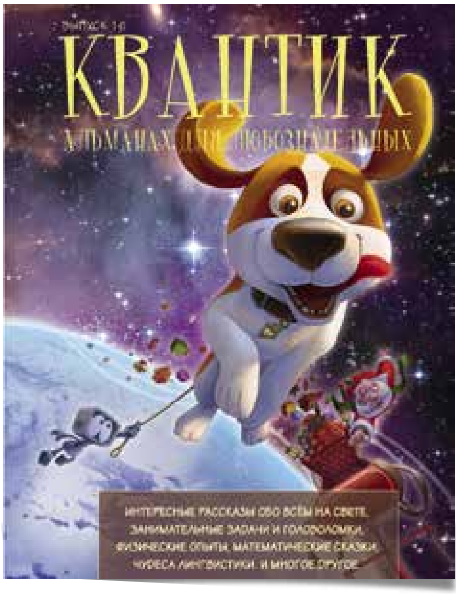
Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

СКОРО В ПРОДАЖЕ!

АЛЬМАНАХ ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

«КВАНТИК» Выпуск 16



В него вошли материалы журнала «КВАНТИК» за II полугодие 2019 года.

Всю продукцию редакции «Квантика» – журналы, альманахи, календари загадок, наборы познавательных плакатов, книги серии «Библиотечка журнала «Квантик» – можно купить при издательстве в магазине «Математическая книга» (г. Москва, Большой Власьевский пер., д.11), в интернет-магазинах **biblio.mccme.ru**, **kvantik.ru** и других (список на сайте **kvantik.com/buy**)

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 8, август 2020 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А. Дориченко
Редакция: В.Г. Асташкина, Е.Н. Козакова, Е.А. Котко, Р.В. Крутовский, И.А. Маховая, Г.А. Мерзон, А.Ю. Перепечко, М.В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas
Вёрстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Сергей Чуб

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях Почты России:
- Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
- Объединённый каталог «Пресса России» (индексы **11346** и **11348**)

Онлайн-подписка
на сайте агентства «Роспечать» **press.rosp.ru**
на сайте агентства АРЗИ **www.akc.ru/itm/kvantik/**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 4000 экз.
Подписано в печать: 07.07.2020
Отпечатано в ООО «Принт-Хаус» г. Нижний Новгород, ул. Интернациональная, д. 100, корп. 8.
Тел.: (831)216-40-40
Заказ № 201522
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

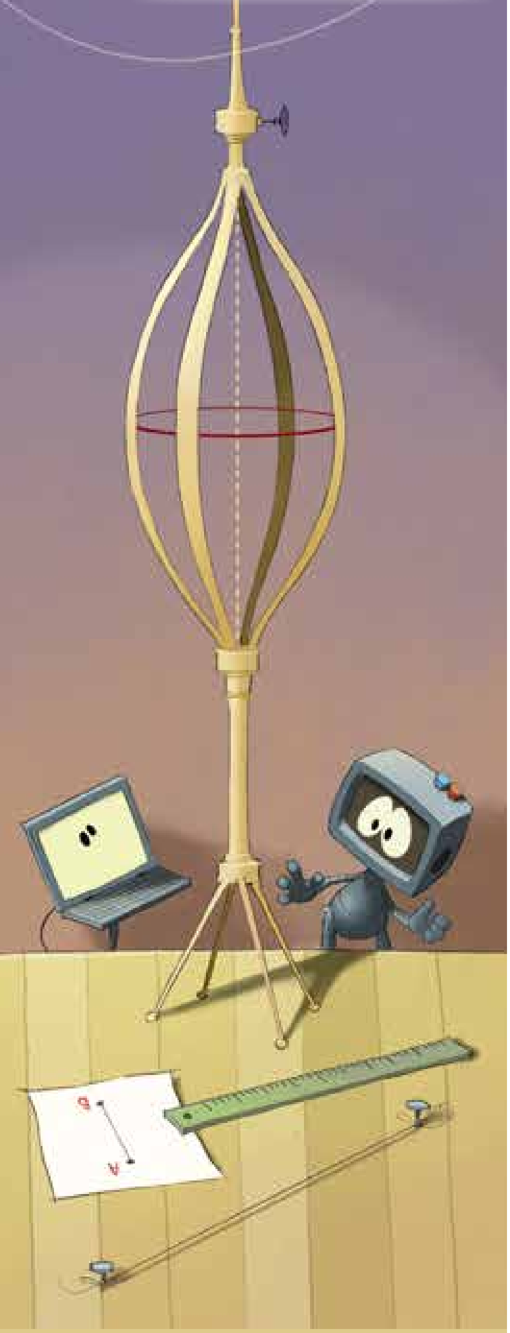
Валерия Сирота

Иди всё прямо, никуда не сворачивая.

Баба Яга

А я пойду прямо,
Ни влево, ни вправо...

М. Щербаков



ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, или ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Легко идти прямо, никуда не сворачивая, когда впереди прямая ровная дорога. Или хотя бы широкая равнина, а вдали видно цель или ориентир – куда идём. А если на пути холмы и овраги, да к тому же вокруг туман или темно? Поди тогда пойми, где тут «прямо». И что вообще такое «идти по прямой», когда идёшь по кривому склону горы? И если идти по этому склону не сворачивая, то куда придёшь?

Вот с подобными вопросами мы и попробуем разобраться. Начнём с того, что такое прямая (обычная, настоящая, на плоскости). Лучше всего подойдёт, пожалуй, такое **определение**:

Прямая – это такая линия на плоскости, которая любые две свои точки соединяет по кратчайшему пути.

То есть возьмём на прямой любые две точки. Проведём все возможные линии (пути) из одной точки в другую. Тогда отрезок нашей прямой – самая короткая из всех этих линий (рис. 1).

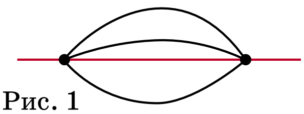


Рис. 1

Такое определение соответствует наставлению «идти прямо»: в какой бы точке прямой ни находилась цель, эта прямая – кратчайший путь к ней. Правда, если цель окажется не на вашей прямой, вы к ней никогда не придёте...

Упражнение 1. Докажите, что ломаная линия (рис. 2) не является прямой. (Если трудно – см. подсказку[1] внизу страницы.)

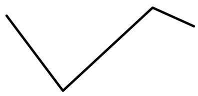


Рис. 2

Из этого упражнения мы видим, что наше определение не велит «никуда сворачивать»: нельзя резко повернуть, от этого получится ломаная, а это – не кратчайший путь.

Упражнение 2. Учёный Сигизмунд изучает некую линию и хочет доказать, что это – прямая. Он уже смог доказать, что путь из точки A в точку D вдоль этой линии – кратчайший из всех возможных. Дока-

[1] *Подсказка.* Чтобы доказать, что линия – не прямая, нужно найти несоответствие определению, то есть найти хотя бы одну пару точек, для которых условие, данное в определении, не выполняется.

жите, что если точки B и C лежат на этой линии между A и D, то путь из B в C вдоль этой линии – тоже кратчайший.[2]

Упражнение 3. А учёный Максимилиан изучает другую линию с точками A, B и C на ней. Он уже доказал, что путь из A в B вдоль этой линии – кратчайший возможный, а также что путь вдоль линии из B в C – тоже кратчайший. Значит ли это, что путь из A в C вдоль этой линии – тоже кратчайший, или это надо проверять отдельно?

С прямой линией на плоскости разобрались. А теперь попробуем применить это определение к кривой поверхности. Например, пусть у нас есть очень крутая и высокая гора (рис. 3). Какой путь из точки A в точку B – самый короткий? Уж конечно, не через вершину. Кратчайший путь явно проходит где-то вдоль подножия горы, как показывает зелёная линия на рисунке. Как видно из упражнения 2, для любой пары точек между A и B на этой линии условие кратчайшего пути тоже выполняется. Выходит, это и есть прямая? Более того – если гора симметричная и точки A и B расположены строго по разные стороны от неё, таких кратчайших путей два! Что же, они оба – прямые?!

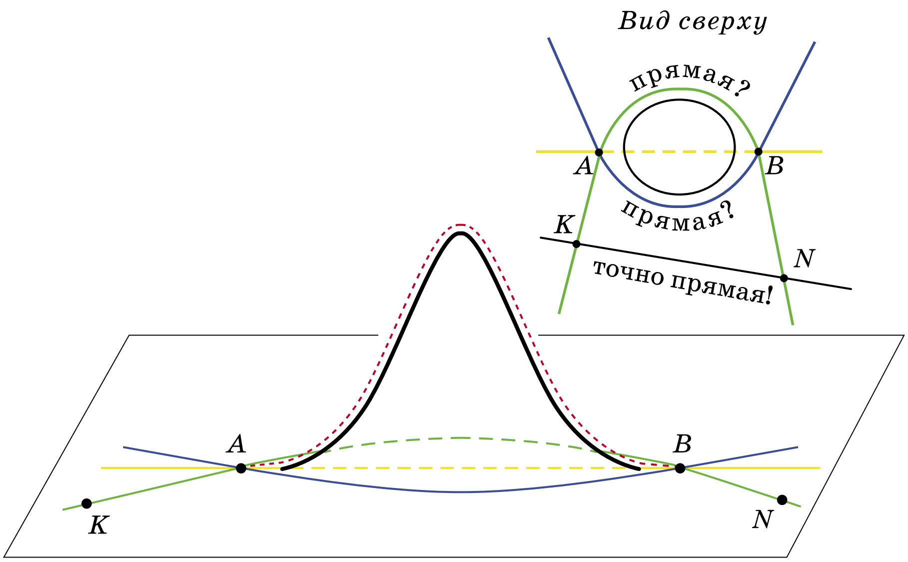


Рис. 3

[2] *Подсказка*. А если это не так и путь из B в C вдоль этой линии не кратчайший – что тогда? Нужно вывести из этого предположения такое следствие, которое противоречит данным задачи. Тем самым вы докажете, что предположение было ошибочным. Это называется *доказательством от противного.*

Почти что так. Но есть одна проблема: как правильно нарисовать продолжения этих «прямых» за точки A и B? Эти продолжения проходят по ровной местности и будут уже похожи на отрезки «настоящих» прямых. Но мы помним (см. упражнение 1), что изломов на «прямой» быть не должно, возле точки излома условие «кратчайшего пути» нарушится. Поэтому «концы» нашей зелёной «прямой», проходящей через A и B, будут очень далеки от той прямой, которая проходит через точки A и B в пространстве (и которая не лежит на обсуждаемой поверхности!).

И вот тут – засада: ведь если мы отойдём от горы, то окажется, что обходить её уже не нужно! Продвигаясь дальше вдоль нашей «прямой», мы вдруг обнаружим, что условие её «прямоты» нарушено: кратчайший путь из точки K в точку N на рисунке 3 уже проходит совсем не по этой линии!

Что же, определение прямой было неправильным? Или невозможно распространить его на гористую местность? Нет, всё не так страшно: просто надо его чуть-чуть подправить. Ведь любая изогнутая поверхность в каждой маленькой своей части похожа на плоскость.

Чтобы «идти всё прямо, прямо», нужно всё время смотреть не на далёкую цель (вдруг ваша прямая не проходит через неё на самом деле?!), а всего на шаг вперёд. Тогда вы не заметите никакой кривизны поверхности, а просто будете делать каждый следующий шаг в том же направлении, что и предыдущий. И каждый маленький кусочек пройденного вами пути будет прямым.[3]

Поэтому в наше определение для случая кривой поверхности добавим только два слова: путь по ней должен быть кратчайшим для любых двух *достаточно близких* точек. Теперь всё в порядке: пару точек K и N в нашем примере можно уже не рассматривать, потому что они недостаточно близкие!

Поскольку всё-таки как-то совестно называть эти

[3] Учтите, что пользоваться этим правилом в реальной жизни опасно. Во-первых, в лесу вы неминуемо наткнётесь на дерево. Во-вторых, человек обычно не совсем симметричен и при ходьбе даже на плоскости может систематически отклоняться от прямой линии в какую-то одну сторону.

изогнутые линии прямыми, их называют красивым словом *геодезические*. Это – обобщение понятия прямой на случай искривлённой поверхности. Итак:

Геодезическая, или геодезическая линия *на поверхности – это такая линия, что любой достаточно маленький её кусочек – кратчайший из всех возможных на этой поверхности путь между его концами.*

Менее строго можно сказать, что геодезическая – это кривая, которая на каждом маленьком (почти плоском) кусочке выглядит как прямая.

Кстати, теперь в нашем примере с симметричной горой, кроме двух геодезических, которые мы нарисовали, через точки A и B проходит ещё как минимум третья – это тот самый путь через вершину горы, который мы вначале забраковали как не самый короткий. Теперь можно просто объявить точки A и B недостаточно близкими – а на каждом коротеньком участочке этот путь «в лоб» вполне похож на прямую.[4]

Как видите, аксиома Евклида, утверждающая, что через любые две точки (плоскости) можно провести ровно одну прямую, для геодезических на кривых поверхностях совсем не работает. Может, есть и ещё «прямые», ведущие из A в B? Это зависит от формы горы.

Полезно ещё иметь в виду, что путь, «прямой» в действительности (то есть геодезический), на карте может казаться изогнутым, как это случилось с зелёной и синей линиями на рисунке 3.

***

Ура! Мы теперь знаем, что такое «идти прямо и не сворачивать» на любом рельефе – это и есть движение по геодезической линии. Теперь для любой поверхности мы можем задаваться такими вопросами:

1) Как выглядят её геодезические?

2) Как провести геодезическую (или геодезиче**ские**) через 2 заданные точки?

[4] Обратите внимание: точки должны быть достаточно близкими, именно если идти по выбранной линии. На рисунке 3 точки A и B довольно близки, если идти понизу. Но «через верх» они не близки. Скоро мы увидим, что геодезическая может очень близко подходить «сама к себе», делая на кривой поверхности петлю, – но такие точки, пусть и близкие на местности, не считаются: они не близки «вдоль кривой».

В общем случае это задача сложная, поэтому предлагаю погулять по поверхностям простым, «почти плоским» – цилиндру и конусу.

Цилиндр

Сделать цилиндр из подручных средств легко (рис. 4): берём лист бумаги, сворачиваем в трубочку и склеиваем (лучше по длинной стороне). Теперь можно посадить на него жука (лучше воображаемого) и чертить геодезические, по которым он будет ползти.

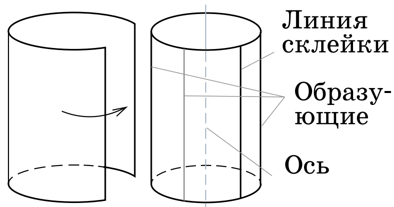


Рис. 4

Если с самого начала выбрать направление, параллельное линии склейки, то жук так и будет ползти по прямой, параллельной этой линии (и оси цилиндра); такие прямые называются *образующими*. Если начать движение в направлении, перпендикулярном оси, то геодезическая представляет собой окружность – сечение нашего цилиндра.

Задача на следующий раз. А какая линия получится, если отправиться в каком-нибудь другом направлении, например по диагонали?[5]

Конус

Самые шустрые могут ещё и по конусу прогуляться. Его тоже легко склеить. Проще всего взять большой лист бумаги, выбрать на одной из его сторон точку – это будет вершина конуса – и склеить между собой две разделённые этой точкой половинки стороны (рис. 5). То, что основание конуса получается неровное и даже с торчащими углами, – не беда: можно считать, что настоящая коническая поверхность бесконечна и это у нас только её кусочек.

Рис. 5

Ещё задача. Как выглядят геодезические на этой поверхности?

Продолжение следует

[5] *Подсказка.* Не спешите склеивать цилиндр, на развёртке чертить удобнее… Хотя вам, возможно, придётся провести не одну линию на развёртке, чтобы жук не остановился «посреди цилиндра». А вот когда начертите, сложите цилиндр и проверьте, что ваша геодезическая проходит линию склейки без разрывов и изломов.

Художник Алексей Вайнер

«Домики и колодцы» на чайной кружке

Невозможно нарисовать на листе бумаги три домика и три колодца и соединить их непересекающимися тропинками так, чтобы между каждым домиком и каждым колодцем была своя тропинка. А удастся ли это, если рисовать домики и колодцы... на поверхности кружки? Попробуйте!

Ответ в следующем номере.

Художник Ольга Демидова

Анастасия Челпанова,
Сергей Дориченко

ЧУКОВСКИЙ, БЭКОН, ЧАЙКОВСКИЙ

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

ЧУКОВСКИЙ

Однажды, когда известный писатель, поэт и критик Корней Иванович Чуковский был ещё гимназистом, директор гимназии, преподававший русский язык, рассказал на уроке про архаизмы – устаревшие слова. Помимо других, он упомянул слово «отнюдь». Юный Корней Иванович, тогда ещё Коля Корнейчуков, пожалел устаревшее слово и решил активно спасать его. Он подговорил десяток своих одноклассников как можно чаще употреблять это слово в разговорах и при ответе на уроках. С этого момента ребята стали при любом удобном случае говорить «отнюдь». Учитель счёл такое поведение дерзким заговором и, так как Коля кричал обычно громче других, вызвал его к себе в кабинет и спросил, намерен ли тот прекратить этот бессмысленный бунт. Когда же Коля по инерции ответил «Отнюдь!», директор разъярился, сделал Коле строгий выговор и оставил на два часа без обеда.

БЭКОН

Эразм Дарвин, дед великого Чарльза Дарвина, считал, что иногда следует производить самые дикие эксперименты. Из них редко что выходит, но если они удаются, результат бывает потрясающим. Например, Дарвин играл на трубе перед своими тюльпанами.

Но мало кто знает, что ещё за несколько столетий до Дарвина подобный эксперимент провёл философ и естествоиспытатель Роджер Бэкон – он играл на волынке перед посадками картофеля в Оксфорде, пытаясь повысить урожайность растения. Об этом он вскользь упоминает в своём «Послании о тайных действиях искусства и природы и ничтожестве магии». Правда, о результате этого эксперимента Бэкон скромно умалчивает – видимо, как и в случае с Дарвином, музыка оказалась не слишком эффективным средством в садово-огородных делах.

ЧАЙКОВСКИЙ

Композитор Пётр Ильич Чайковский в юные годы занимался в училище правоведения, где была интересная традиция. Многие секретные письма, скрываемые от глаз воспитателей, писались на так называемом «тарабарском» языке. В русских словах одни согласные заменялись другими (верхняя буква таблички – на стоящую под ней и наоборот):

Б	В	Г	Д	Ж	З	К	Л	М	Н
П	Р	С	Т	Ф	Х	Ц	Ч	Ш	Щ

Гласные буквы оставались самими собой. «Пётр Чайковский» на этом языке звучал, как «Бедв Лайцоргций». Многие воспитанники училища, в том числе и Чайковский, достаточно свободно не только писали, но и говорили на этом языке!

А во взрослые годы, когда главный редактор газеты «Русские ведомости» предложил композитору писать статьи о музыке, Пётр Чайковский стал подписывать их своими инициалами. Но это были не П.Ч., а Б. Л. – первые буквы его имени и фамилии на «тарабарском» языке.

Художник Капыч

Математический кружок

Егор Бакаев

Комбинации квадратов

Художник Алексей Вайнер

Разберём несколько задач про квадраты – от простых до довольно сложных. Зачастую написаны только план или идеи – полные решения попробуйте получить самостоятельно.

1. Даны два квадрата с общей вершиной. Докажите, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны (рис. 1, *а*).

План первого решения. Два треугольника, заштрихованных синим (рис. 1, *б*), равны по первому признаку. Тогда пунктирные отрезки равны как соответствующие стороны. Перпендикулярны они потому, что в двух треугольниках, обведённых зелёным, равные наборы углов.

Аналогичное утверждение верно и для квадратов на рисунке 1, *в* (найдём два равных треугольника, продлим пунктирные отрезки до пересечения и завершим решение, как раньше).

Второе решение использует *поворот*. Поясним, что это такое. Сделаем копию чертежа на прозрачной плёнке и наложим её на чертёж так, чтобы оригинал и копия совпали. Воткнём в стол иглу, проколов чертёж и копию. Если теперь подвинуть плёнку, копия чертежа повернётся вместе с ней вокруг точки, в которую воткнута игла.

Перечислим основные свойства поворота. Пусть поворот был совершён вокруг точки O, точка A перешла в точку A', точка B – в точку B' (рис. 1, *г*). Тогда:

1) углы AOA' и BOB' равны (все точки поворачиваются на один и тот же угол);

2) фигуры переходят в равные им;

3) угол между прямыми (точнее, лучами) AB и $A'B'$ равен углу поворота.

Вернёмся к задаче. Повернём конструкцию на 90° вокруг общей вершины квадратов (рис. 1, *д*). В каждом квадрате одна вершина перейдёт в другую (ведь

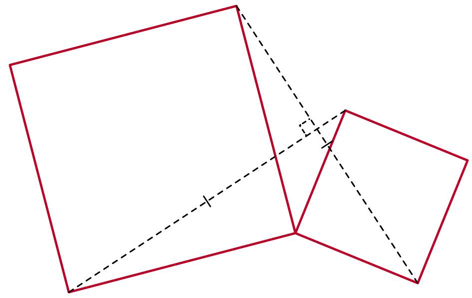


Рис. 1, *а*

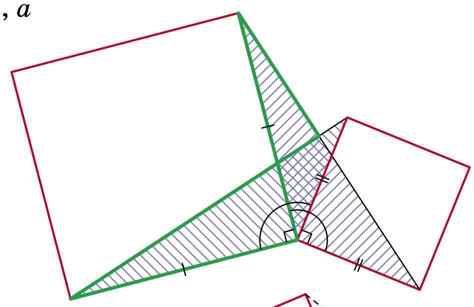


Рис. 1, *б*

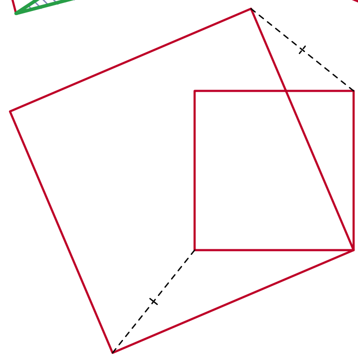


Рис. 1, *в*

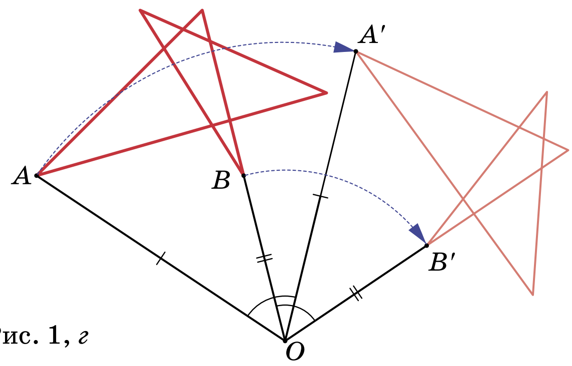


Рис. 1, *г*

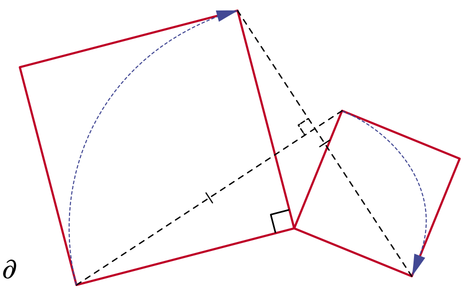


Рис. 1, *д*

соседние стороны квадрата равны и перпендикулярны). Но тогда один пунктирный отрезок перейдёт в другой. По свойству 2 эти отрезки равны, а по свойству 3 они перпендикулярны.

2. Докажите, что центр синего квадрата – это середина отрезка, соединяющего вершины двух красных квадратов (рис. 2, *а*).

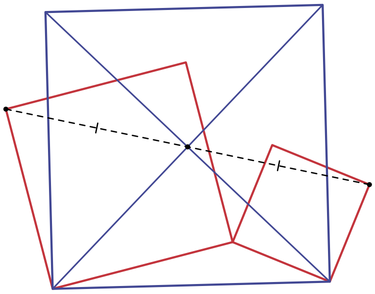


Рис. 2, *а*

Решение. Тут есть такие же пары квадратов, как в задаче 1. Взяв две такие пары, получим, что три заштрихованных треугольника равны (рис. 2, *б*). Итак, на противоположных сторонах квадрата построены равные треугольники и надо доказать, что их вершины лежат на одной прямой с центром квадрата.

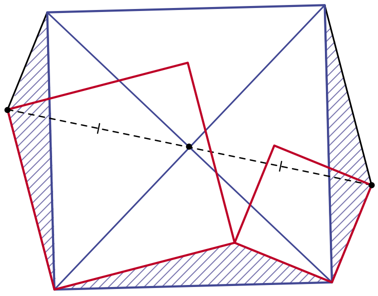


Рис. 2, *б*

Рассмотрим симметрию относительно центра синего квадрата. (Центральная симметрия – это поворот на 180°.) Квадрат симметричен самому себе, а боковые треугольники – друг другу. Значит, вершины боковых треугольников не только лежат на одной прямой с центром квадрата, но и равноудалены от него.

Можно было доказать это и без симметрии, а с помощью равенства треугольников – подумайте, как.

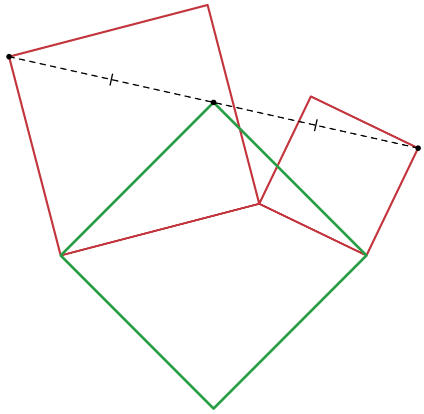


Рис. 3, *а*

3. На рисунке 3, *а* даны три квадрата. Докажите, что вершина зелёного квадрата – это середина отрезка, соединяющего вершины красных квадратов.

Первое решение. Добавив синий квадрат (рис. 3, *б*), получим конструкцию из задачи 2, и всё доказано.

Второе решение. Применим задачу 1 для зелёного и одного из красных квадратов. Получим, что синий и один из чёрных отрезков равны и перпендикулярны (рис. 3, *в*). Для зелёного квадрата и другого красного квадрата получим то же самое для синего и второго чёрного

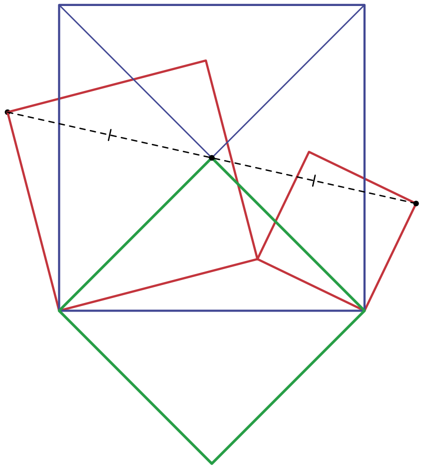


Рис. 3, *б*

отрезков. Значит, отрезки из условия задачи равны и лежат на одной прямой.

4. Даны два квадрата и отрезок, соединяющий их вершины (рис. 4). Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.

Решение. Эта задача обратна предыдущей. В ней мы доказали, что вершина зелёного квадрата – середина отрезка. Но у отрезка только одна середина, поэтому пунктирные отрезки равны и перпендикулярны, так как это стороны зелёного квадрата из предыдущей задачи.

5. Даны три квадрата (рис. 5, *а*). Докажите, что два пунктирных отрезка равны и перпендикулярны.

Решение. Комбинация квадратов тут такая же, как в задаче 3. Используя её, получим, что вершина зелёного квадрата лежит на середине отрезка, соединяющего две вершины красных квадратов (рис. 5, *б*). Теперь, зная, что это середина отрезка, воспользуемся задачей 4.

6. Противоположные вершины синего квадрата лежат в центрах красных квадратов (рис. 6, *а*). Докажите, что другие две вершины синего квадрата – это середины отрезков, соединяющих вершины красных квадратов.

Решение. Применим к зелёным квадратам и синему квадрату утверждение задачи 3 (рис. 6, *б*). Для другой вершины утверждение доказывается аналогично – берём такие же квадраты, но построенные «с другой стороны».

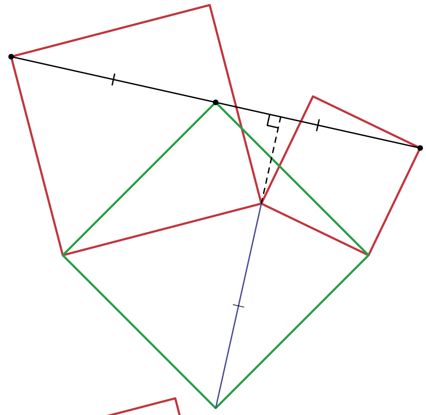


Рис. 3, *в*

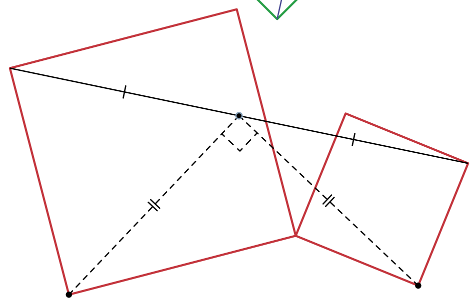


Рис. 4

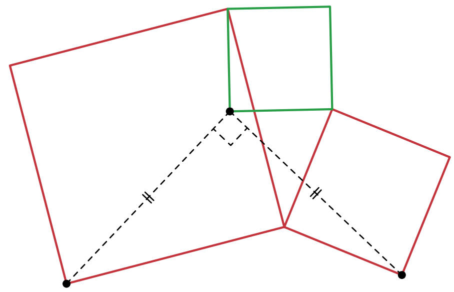


Рис. 5, *а*

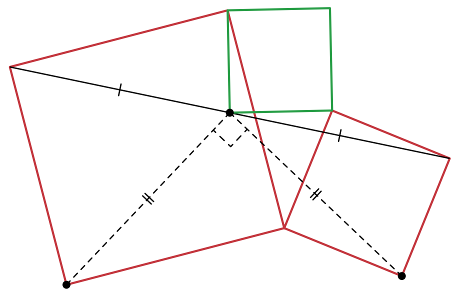


Рис. 5, *б*

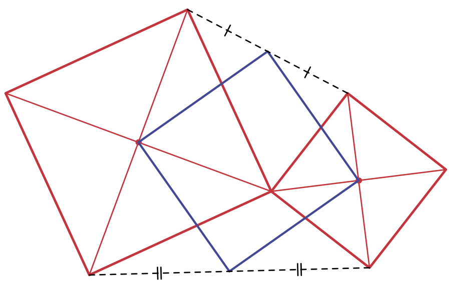


Рис. 6, *а*

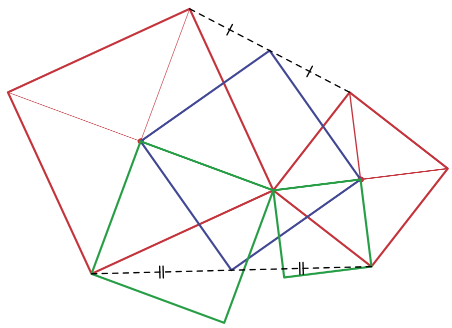


Рис. 6, *б*

7. На сторонах четырёхугольника во внешнюю сторону построены четыре квадрата (рис. 7, *а*). Докажите, что отрезки, соединяющие центры противоположных квадратов, равны и перпендикулярны.

Решение. Рассмотрим красные квадраты (рис. 7, *б*). По задаче 6 середина зелёной диагонали четырёхугольника будет их общей вершиной. Применив к красным квадратам задачу 1, получим, что пунктирные отрезки равны и перпендикулярны.

8. На сторонах четырёхугольника во внешнюю сторону построены четыре квадрата (рис. 8, *а*). Докажите, что середины диагоналей четырёхугольника и середины отрезков, соединяющих центры противоположных квадратов, образуют квадрат.

Решение. Рассмотрим те же красные квадраты, что в решении предыдущей задачи (рис. 8, *б*).

Применим к ним задачу 1. Один отрезок переходит в другой при повороте вокруг их общей вершины на 90°. Тогда середина одного отрезка переходит в середину другого. Значит, отрезки, соединяющие эти середины с центром поворота, равны и перпендикулярны (по свойствам 2 и 3 поворота).

Таким образом, три точки образуют равнобедренный прямоугольный треугольник. Рассмотрев другую пару красных квадратов, аналогично получим, что другая тройка точек тоже образует равнобедренный прямоугольный треугольник с той же гипотенузой. Значит, они образуют квадрат.

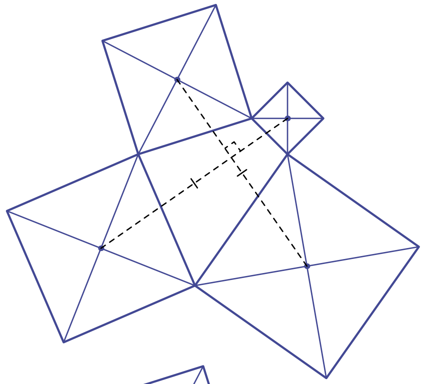


Рис. 7, *а*

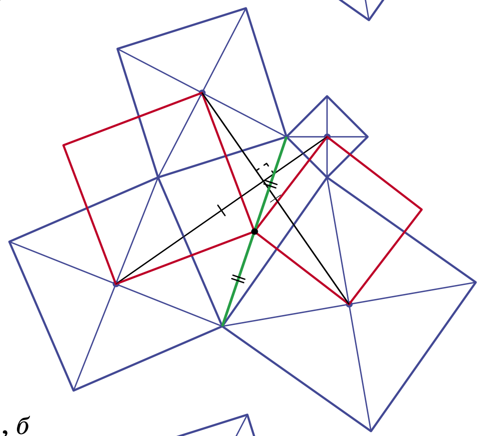


Рис. 7, *б*

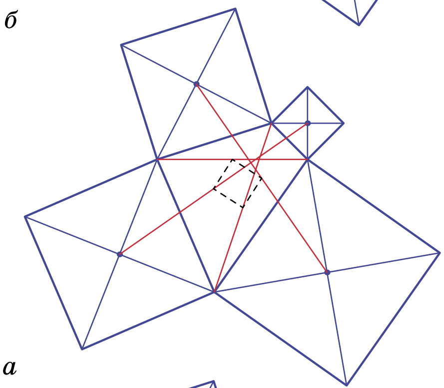


Рис. 8, *а*

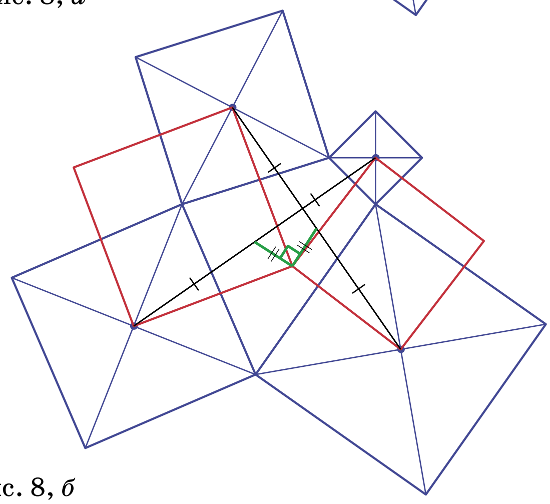


Рис. 8, *б*

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

Условия задач приведены на рисунках 9–14. Отрезки, утверждение про которые надо доказать, проведены пунктиром (в каждой задаче надо либо доказать, что отрезки перпендикулярны, либо доказать, что три точки лежат на одной прямой). Указания – в следующем номере.

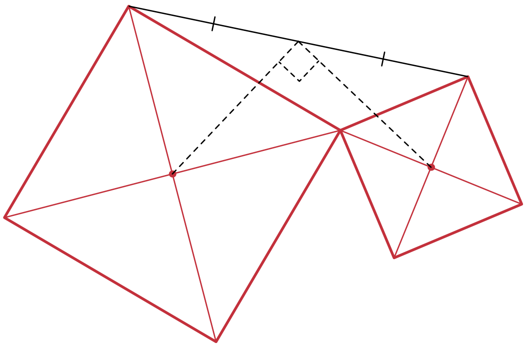


Рис. 9

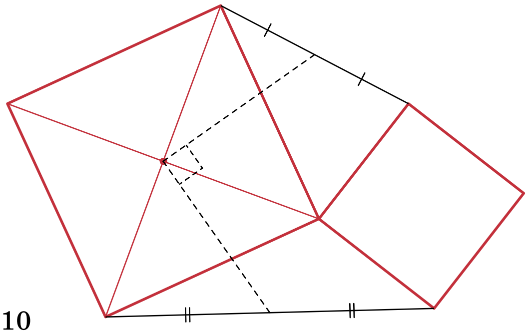


Рис. 10

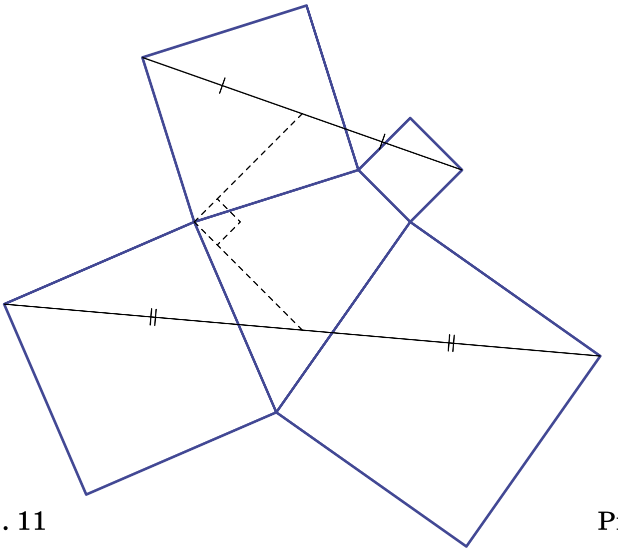


Рис. 11

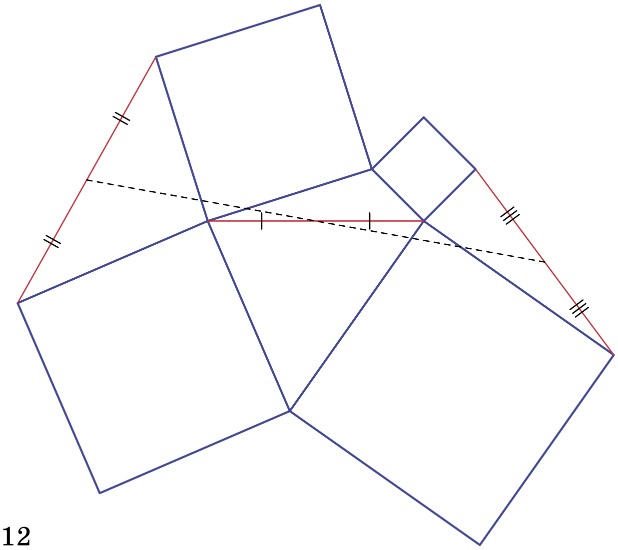


Рис. 12

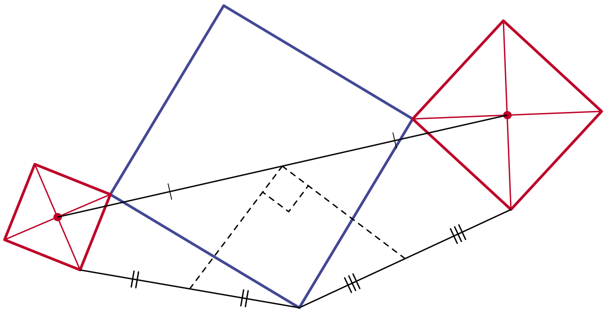


Рис. 13

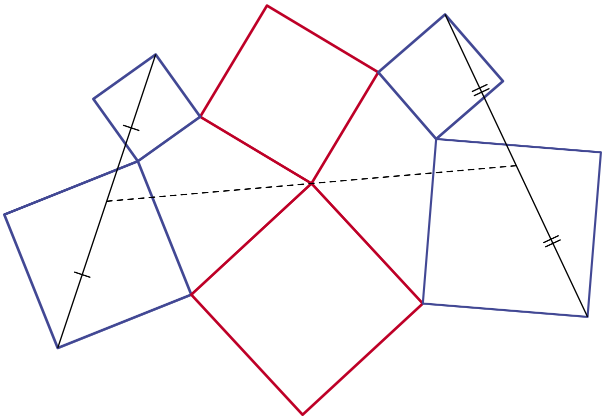


Рис. 14

Ответы в следующем номере

Валерия Сирота

Про варенье

1. Если банка варенья не открывается, её нужно подержать под струёй горячей воды. Зачем? И почему это не всегда помогает? А отчего у (запечатанных) банок варенья, особенно домашнего и с пластмассовой крышкой, крышка часто бывает вогнута внутрь?

2. Перед тем как наливать в них варенье, банки стерилизуют. Это можно делать по-разному; например, их ставят «горлом» вниз в кипящую воду.

Проведите (обязательно вместе со взрослыми!) эксперимент: в широкую и глубокую миску или низкую кастрюлю с кипящей водой, стоящую на плите, опустите вверх дном литровую (или 800-миллилитровую) банку. Осторожно!! Во-первых, не обожгитесь паром и кипятком; во-вторых, важно, чтобы банка не треснула. Для этого опускать нужно постепенно, не бросая. Лучше, чтобы уровень воды был около трети высоты банки. Продолжайте «варить» банку в кипящей воде минут 5–10. Следите, чтобы она не упала: не давайте ей сильно наклоняться! Потом выключите плиту. Ещё через несколько минут вы увидите, что банка «выпила» почти всю воду из миски – втянула её в себя! Уровень воды в банке стал резко выше, чем в остальной части миски. Почему так случилось?

3. Почему сливовые косточки тонут в воде, но всплывают в варенье?

4. Для варенья из кислых ягод делают сироп из 1,5 кг сахара и полстакана (то есть 100 мл) воды. Каких молекул – воды или сахара – больше в этом сиропе и во сколько раз?

Художник Мария Усеинова

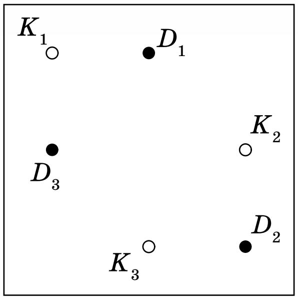
Математические сказки

Константин Кохась

Как Бусенька рисовала $K_{3,3}$

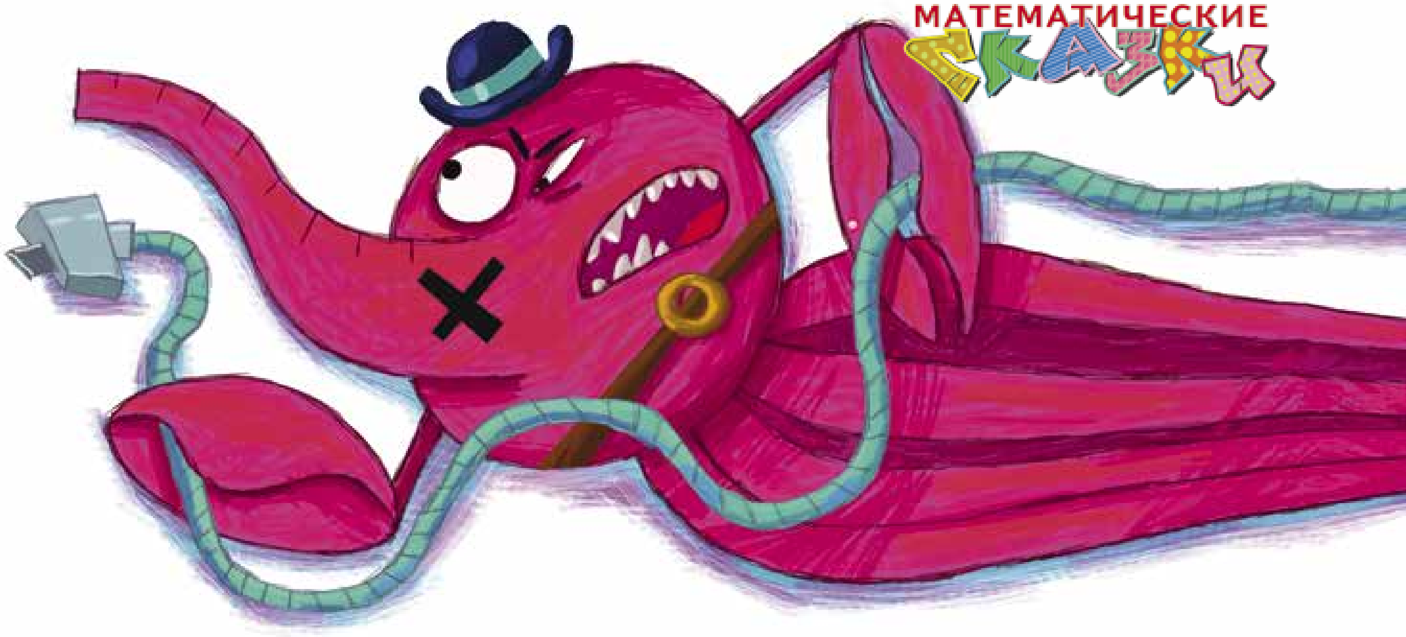
Ветер не утихал. Шорохи и завывания не прекращались ни на секунду.

– Итак, пора поставить наши злокозненные планы на конструктивные рельсы! – важно заявил Злобнопотам. – Прошу ознакомиться с картой оперативного вмешательства. – И Злобнопотам развернул карту. – Вот тут – показал он на синюю точку, обозначенную D_1, – расположена конура Горгулия. Точка D_2 – это Ам-Бар. Где-то здесь, – ткнул он в точку D_3, – около коряги, находится нора Ушаси. Я провёл большую подготовительную работу. Возле свалки в точке K_1 я смонтировал дегрессионный депрессодетонатор, он замаскирован под ржавое корыто. К югу от Старого сарая – это здесь, в точке K_2, – развёрнут аутический глюкотранслятор, он вкручен в трухлявый пень и присыпан веточками. И наконец, в точке K_3 (это возле брошенной барсучьей норы) я поставил новейший психошизотрон – воткнул его прямо в нору. Как это всё подключить, нам расскажет Коллега Спрудль.



Коллега Спрудль взмахнул хоботом и, побулькивая, гнусаво произнёс:

– Для подключения депрессодетона-а-атора, бульк, можно воспользоваться обычным резиновым шлангом. Проще простого! Подключаем шланг к детона-а-а-атору и тянем его прямо к домику клиента. Что касается глюкотрансля-а-атора, бульк, – это вещь деликатная, тут потребуется экранирова-а-а-анный силовой кабель на 500 вольт. К каждому объекту тянем от трухля-а-а-авого пня, бульк, свой кабель. Окончательный монтаж примитивен: просто вкручиваем конец кабеля в любую стену. Наконец, для психошизотрона бюджетных ва-а-а-ариантов, бульк, не очень много. Проще всего использо-



вать обычный канат, пропитанный на-а-а-ашатырным спиртом – недорого, бульк, но на небольших диста-а-а-анциях работает безотказно. Один конец каната вставляем в USB-порт шизотрона, а другой – просто оставляем, бульк, под окном конечного пользователя. Все устройства допускают параллельное подключение. Доставку трёх шлангов, трёх кабелей и трёх канатов я за-а-а-аказал на сегодняшний вечер. Таким образом, бульк, мы без проблем подключим каждое устройство к объектам D_1, D_2, D_3. Ночью всё смонтируем.

– Нужно нарисовать схему прокладки шлангов, – предложил Уккх, прислушиваясь к пению ветра, – а не то в темноте всё перепутаем.

– Да-а-а-а, да! Схему обязательно, – встрепенулся Коллега Спрудль. – Но я чуть не забыл сказать! За-а-а-земление! Во избежание помех, все коммуника-а-а-ационные каналы прокладываются, бульк, строго по поверхности земли, ни в коем случае не прикапывать и не подвешивать! И ещё ни в коем случае нельзя допуска-а-а-ть, бульк, пересечения коммуника-а-а-ационных каналов; лучше, чтобы они даже не приближались друг к другу ближе чем на полметра. Иначе помех не о-о-о-оберёшься!

– Ну если это все ограничения, я быстренько сляпаю схемку! – И Злобнопотам принялся чертить линии на карте. – Здесь идёт шланг, здесь канат, сюда пойдёт второй шланг... Нет, так не годится, – сказал он через некоторое время, – так они пересекутся. Проложим этот кабель в обход... А этот шланг пустим правее... Нет, лучше левее...

Уккх незаметно покинул заговорщиков.

* * *

Вопли были слышны издали.

– Я сейчас тебя воткну в шизотрон вместо шланга! – орал Злобнопотам на Коллегу Спрудля.

– А я закатаю тебя в этот трухлявый пень, бульк! – хрипел в ответ Коллега Спрудль, размахивая всеми четырьмя клешнями. – Всю оста-а-авшуюся

жизнь ты будешь выглядеть как ржавое корыто!

– Помощь не требуется? – дружелюбно спросил Уккх, подползая поближе. – Смотрите, кого я поймал.

Злобнопотам и Коллега Спрудль повернулись и открыли было рты, чтобы объяснить Уккху, какие блестящие перспективы ожидают его в будущем, если он немедленно не заткнётся, но Уккх опередил их.

– Тиш-ш-шина и с-с-с-покойс-с-ствие, друзья мои! – сказал он проникновенным голосом, пристально посмотрев на своих приятелей. – Всё будет хорош-ш-шо. Садитес-с-с-сь поудобнее, сейчас-с-с мы реш-ш-шим все проблемы…

Злобнопотам и Коллега Спрудль сразу притихли и как-то съёжились.

– Позвольте вас познакомить, – продолжал Уккх, – это Злобнопотам, а это Коллега Спрудль, они вспыльчивые ребята и не всегда очень вежливые, но если их периодически осаживать, вполне терпимы. А это – Бусенька! Умнейшее существо!

И действительно, это была Бусенька. Уккх подтолкнул её немного вперёд, перекрывая своим телом пути к отступлению.

– Где ты это взял? – спросил Злобнопотам. Проявляя удивление, он не смог удержаться, чтобы слегка не нахамить.

– Повежливее, друг мой, повежливее, – сказал Уккх, ещё раз пристально посмотрев на Злобнопотама, – не забывайтес-с-сь, это моя го-с-с-тья! В ветреную погоду она любит лазать по деревьям. Это у неё здорово получается. Но я её всё-таки выследил!

– Вы та самая Бусенька? – воскликнул Коллега Спрудль, мгновенно выбрав правильную линию поведения. – Премного о вас наслышан.

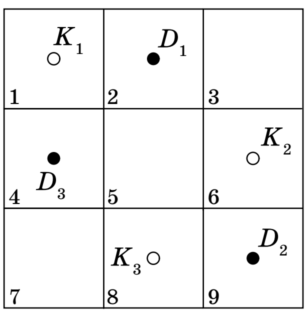
Бусенька недоверчиво смотрела на присутствующих.

– Представля-а-а-аете, – продолжал Коллега Спрудль, – мы как раз решали довольно любопытную задачку. Вот посмотрите, бульк: есть три синие точки D_1, D_2, D_3 и три красные – K_1, K_2, K_3. Нужно соединить эти точки

линиями так, чтобы от каждой кра-а-а-асной точки шёл шланг к каждой синей и чтобы шланги не пересекались. Задание звучит очень просто, но почему-то, бульк, никак не получается. Я уже начал думать, что это во-о-о-обще невозможно. Мы с прия-а-а-ателем даже немного поспорили по этому поводу, – кивнул он на Злобнопотама.

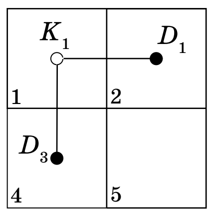
Бусенька присмотрелась. Расположение точек D_1, D_2, D_3 ей показалось знакомым.

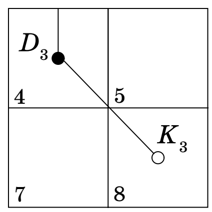
– Неудобная у вас схема, – сказала Бусенька, – слишком уж большая, не влезает на стол – и выхватив нож, висевший на поясе Коллеги Спрудля, она быстро разрезала схему на 9 частей.



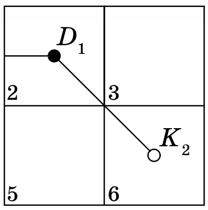
– Хорошо заточен! – похвалила Бусенька нож и кинула его Коллеге Спрудлю. – Ну вот, так работать существенно удобнее, сейчас мы быстренько всё соединим.

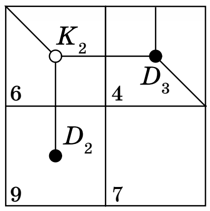
Бусенька положила на стол 1-й, 2-й, 4-й и 5-й кусок карты оперативного вмешательства и сразу же провела две линии, соединив точку K_1 с точками D_1 и D_3. Потом Бусенька выложила на стол листы номер 4, 5, 7 и 8 и соединила точку D_3 с точкой K_3.

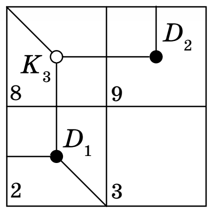


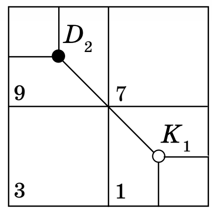


Коллега Спрудль с восхищением смотрел на Бусеньку. Злобнопотам и Уккх подвинулись поближе и наблюдали за происходящим как зачарованные. А Бусенька тем временем выложила на стол листы номер 2, 3, 5, 6 и соединила точки D_1 и K_2. Затем на листах 6, 4, 9 и 7 она соединила точку K_2 с точками D_2 и D_3.









– Почему ты так странно кладёшь части карты? – спросил Уккх. – Четвёртый лист должен лежать левее шестого, а ты кладёшь его правее!

– Ну так Земля-то круглая! Если долго идти на восток, вернёшься обратно с запада. Двигаясь с шестого листа на восток, мы в конце концов придём на четвёртый лист. Далековато, конечно, но вы ведь не смогли решить эту задачу на куске плоскости. Попробуем решить её на целой планете, то есть на сфере!

Бусенька взяла листы номер 8, 9, 2, 3 и соединила точку K_3 с точками D_2 и D_1, а потом на листах 9, 7, 3, 1 соединила точки D_2 и K_1.

– Вот и всё, стоило ли тратить столько нервов! – сказала Бусенька. – Что может быть лучше чувства хорошо проделанной работы! Приступайте к монтажу!

Она сложила в стопку куски карты оперативного вмешательства и протянула их Злобнопотаму. Собравшиеся изумлённо смотрели на Бусеньку.

– Потря-а-а-асающе! – опомнился первым Коллега Спрудль. – Действительно, работа настоящего мастера! Позвольте, бульк, я вас немного провожу.

– Ну разве что совсем чуть-чуть, – скромно потупилась Бусенька. – До двери. А дальше я уж как-нибудь сама.

Комментарий. Граф $K_{3,3}$ – это граф, содержащий три синие и три красные вершины, в котором каждая синяя вершина соединена ребром с каждой красной. Старая головоломка предлагает нарисовать три домика и три колодца, соединив каждый домик с каждым колодцем непересекающимися тропинками. Вообще-то нарисовать граф «3 домика – 3 колодца» на плоскости или на сфере невозможно – это строгая математическая теорема. Но у Бусеньки, похоже, просто не было другого выхода. Это не обман, это военная хитрость!

Художник Инга Коржнева

Задача о шифровальной машине

Георгий Караваев,
ученик 10 класса

В отделе полиции переполох – найдена шифровальная машина, которую использовали преступники. Устроена она так: каждой цифре сопоставлен *ключ* из **двух** или **трёх** цифр, записанных подряд (первая цифра может быть нулём, цифры в ключе могут повторяться, разные цифры могут иметь одинаковые ключи). Каждой цифре также сопоставлен *двойной ключ*, который определяется так: вместо каждой цифры ключа выписывается её собственный ключ. Например, рассмотрим машину с ключами как в табличке справа.

ЦИФРА	КЛЮЧ
0	234
1	22
2	40
3	011
4	40

Найти двойной ключ нуля можно так:

Исходная цифра **0** → **234** Ключ исходной цифры

Цифры ключа исходной цифры: **2** **3** **4**

Ключи цифр ключа исходной цифры: **40** **011** **40**

Двойной ключ исходной цифры: **4001140**

Аналогично находятся остальные двойные ключи:

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
0	234	4001140
1	22	4040
2	40	40234
3	011	2342222
4	40	40234

Изучив шифровальную машину, полицейские получили двойные ключи всех цифр:

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
0	?	4570332
1	?	703296
2	?	63270
3	?	3296
4	?	084596
5	?	9632703
6	?	45703
7	?	172230
8	?	9663270
9	?	703296

Возможно ли восстановить ключи всех цифр?

Художник Евгений Паненко

КОСМИЧЕСКИЕ СКОРОСТИ

Борис Дружинин

«ПОЕХАЛИ!»

В 1957 году работа советских учёных, конструкторов, инженеров, рабочих, во главе с Сергеем Павловичем Королёвым, увенчалась блестящей победой: 4 октября они вывели на орбиту первый в истории искусственный спутник Земли. А 12 апреля 1961 года отправили в первый космический полёт человека – Юрия Алексеевича Гагарина. На весь мир прозвучало знаменитое гагаринское «Поехали!», и человечество вступило в космическую эру.

Космическая тематика стремительно вошла в моду. Естественно, появились новые темы и понятия – ракеты, скафандры, невесомость, первая космическая скорость, вторая космическая скорость. Все мальчишки нашего поколения в мечтах примеряли скафандр космонавта. О невесомости мы поговорим в другой раз, а пока рассмотрим космические скорости.

ЧТО ИЗВЕСТНО О КОСМИЧЕСКИХ СКОРОСТЯХ ПРОСТЫМ ЛЮДЯМ

На телевидении есть передача, в которой весёлый молодой человек бегает по улицам и задаёт прохожим разные вопросы. За правильный ответ он вручает 1000 рублей. Однажды он задал такой вопрос: «Какую скорость надо развить, чтобы оторваться от Земли?» Первый встречный ответить не смог, и ведущий буквально клещами вытащил из второго ответ, который был признан правильным: «Вторую космическую».

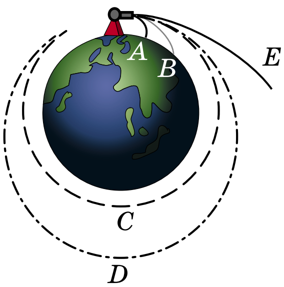
Увы, молодой человек ошибся. Вернее, ошибся не он, а редакторы, придумывающие вопросы и ответы к ним. Точно так, как и редакторы, считают почти все, кто хоть отдалённо слышал про существование первой и второй космических скоростей.

На самом деле, чтобы оторваться от Земли, подходит любая скорость. Уже когда ребёнок подпрыгивает, он отрывается от Земли. Пусть ненадолго, но отрывается. И вообще, до Луны или до другого космического объекта можно добраться с любой скоростью. Для этого надо немного разогнаться, а потом поддерживать силу тяги двигателя, равную силе земного притяжения, и вы будете «бороздить просторы Вселенной» с постоянной скоростью. Более того, если представить, что какой-то чудак сумел построить лестницу до Луны, то вы сможете подняться туда просто пешком. Примерно так, как вы поднимаетесь к себе домой на третий этаж, только гораздо дольше.

А как же космические скорости? ***Космические скорости подразумевают, что ракета, достигнув их, дальше летит к намеченной цели по инерции, с неработающим двигателем.*** Это только в мультфильмах про космические путешествия показывают летящие ракеты с работающим двигателем. Но это исключительно для создания иллюзии движения.

Если же в реальных условиях двигатель у ракеты будет работать постоянно, то даже для полёта на Луну потребуется такое количество топлива, что его ни одна ракета не осилит.

ПОСТРЕЛЯЕМ



Высадимся на идеально шарообразную планету без атмосферы. Поставим там пушку с горизонтальным стволом и будем из неё стрелять, постепенно увеличивая заряд.

Сначала снаряд будет падать на поверхность планеты совсем близко (*A*), потом дальность полёта увеличится (*B*) и, наконец, снаряд совершит полный оборот, продолжая лететь на постоянной высоте (*C*). ***Скорость полёта в этом случае и есть первая космическая.***

Продолжим увеличивать скорость снаряда. Траектория вытягивается, превращаясь в эллипс (*D*), а с какого-то значения скорости «разрывается» (*E*), и снаряд улетает в бесконечность. ***Скорость полёта в этом случае и есть вторая космическая.***

ПЕРВАЯ КОСМИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ

Первая космическая скорость — это скорость, с которой надо горизонтально запустить объект, чтобы он стал вращаться вокруг Земли по круговой орбите.

Чем больше высота, с которой мы запускаем объект, тем меньше эта скорость. Например, Международная космическая станция летает на высоте

400 км со скоростью 7,6 км/с, а Луна – на расстоянии 384 500 км от Земли со скоростью 1 км/с. «Нулевой» высоте соответствует скорость 7,9 км/с, что обычно и называют первой космической скоростью.

Точно так же, Земля вращается вокруг Солнца почти по круговой орбите со скоростью $\approx$ 30 км/с. Это и есть первая космическая скорость относительно Солнца на таком расстоянии от него.

Если скорость спутника чуть больше первой космической для его высоты, его орбита будет эллипсом. Все спутники вокруг Земли и планеты вокруг Солнца движутся именно по эллипсам. И орбиты комет – тоже эллипсы, только очень вытянутые, так что кометы улетают по ним «в даль тёмную», лишь изредка возвращаясь к Солнцу «погреть бока».

Иными словами, первая космическая скорость – это минимальная скорость, при которой тело, движущееся горизонтально над поверхностью планеты, не упадёт на неё, а будет двигаться по круговой орбите.

ВТОРАЯ КОСМИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ

Вторая космическая скорость – наименьшая скорость, которую необходимо придать космическому аппарату для преодоления притяжения планеты и покидания замкнутой орбиты вокруг неё.

Предполагается, что аппарат не вернётся на планету, улетит в бесконечность. На самом деле тело, имеющее около Земли такую скорость, покинет её окрестности и станет спутником Солнца. Вторая космическая скорость в $\sqrt{2} \approx 1{,}4$ раза больше первой космической.

ТРЕТЬЯ КОСМИЧЕСКАЯ СКОРОСТЬ

Третья космическая скорость – минимальная скорость, которую необходимо придать находящемуся вблизи поверхности Земли телу, чтобы оно могло преодолеть притяжение не только Земли, но и Солнца, и покинуть пределы Солнечной системы.

Чтобы преодолеть притяжение Солнца, находясь на орбите Земли, нужно развить скорость в $\sqrt{2}$ раз больше, чем скорость Земли. То есть в направлении движения Земли тело нужно запускать со скоростью $(\sqrt{2}-1) \cdot 30$ км/с ≈ 12 км/с. Чтобы преодолеть притяжение Земли, нужна скорость $\sqrt{2} \cdot 7{,}9$ км/с $\approx$ ≈ 11 км/с. Преодолеть и то, и другое можно со скоростью ≈ 16,6 км/с. В действительности хватит и меньшей скорости, если запустить космический аппарат так, чтобы его ускоряли другие планеты.[1]

КОСМИЧЕСКИЕ ДОСТИЖЕНИЯ

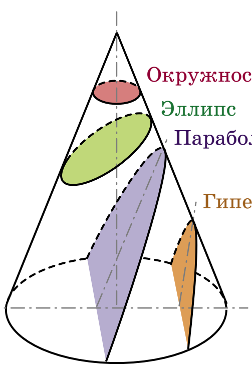
Первый искусственный спутник Земли был шариком диаметром 58 см и передавал только звуковой сигнал «бип-бип-бип». Но первая космическая скорость была достигнута! А всего через год, 2 января 1959 года, космический аппарат «Луна-1» полетел, естественно к Луне, со второй космической скоростью.

Пока с наибольшей скоростью 16,26 км/с покидала Землю автоматическая межпланетная станция «Новые горизонты», запущенная в США 19 января 2006 года. Относительно Солнца её скорость составляла 45 км/с – благодаря тому, что запускалась она в сторону движения Земли по орбите.

КОНИЧЕСКИЕ СЕЧЕНИЯ

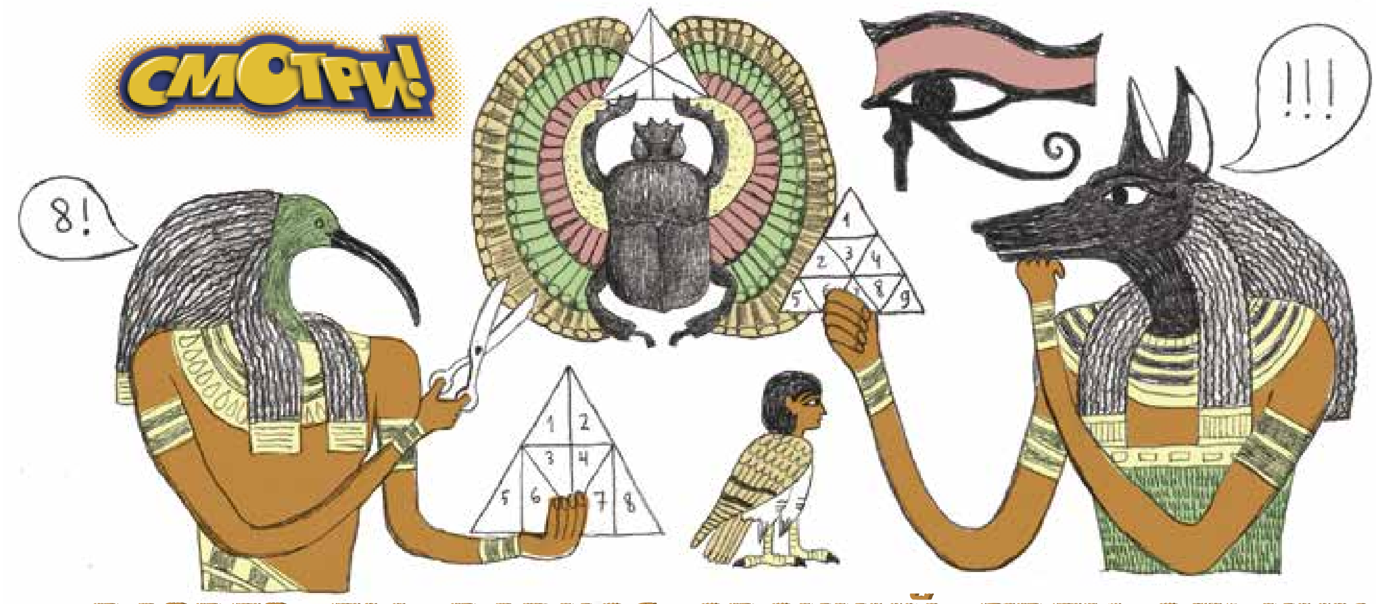
Вернёмся к движению тела вокруг одного источника притяжения, например Солнца. Если тело запустить с первой космической перпендикулярно направлению на Солнце, оно полетит по окружности. Если запустить его в любом направлении, только не на само Солнце, со скоростью меньше второй космической, орбита будет эллипсом. При запуске со второй космической получится парабола. Если запустить с ещё большей скоростью, получится гипербола.

Эти кривые можно увидеть, пересекая конус плоскостью. Если ось конуса перпендикулярна плоскости, в пересечении получится окружность. Будем постепенно менять угол наклона плоскости к оси конуса. Линия пересечения превращается в эллипс, причём чем больше угол наклона, тем более вытянутым получается этот эллипс. Продолжим наклонять секущую плоскость до тех пор, пока она не станет параллельной одной из касательных плоскостей конуса. В этот момент линия пересечения – парабола. Наклоним ещё – получится гипербола.



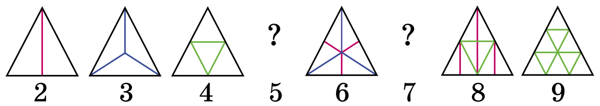
[1] Подробнее об этом читайте в «Квантике» №11 за 2016 год, с. 2 – 5.

Художник Мария Усеинова



РАЗРЕЗАЕМ РАВНОСТОРОННИЙ ТРЕУГОЛЬНИК

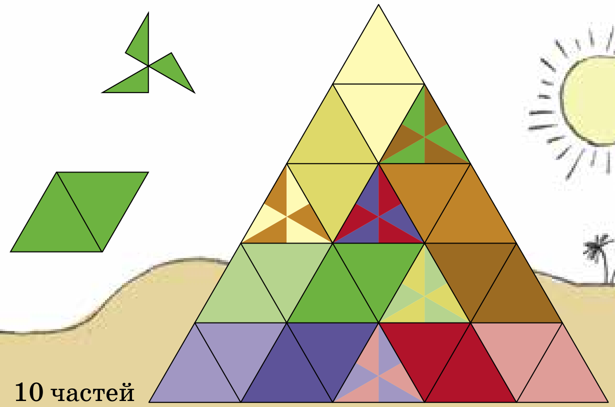
Несложно разрезать равносторонний треугольник на 2, 3, 4, 6, 8 равных треугольников или на любое их число вида n^2 (см. «Квантик» № 7 за 2020 год).



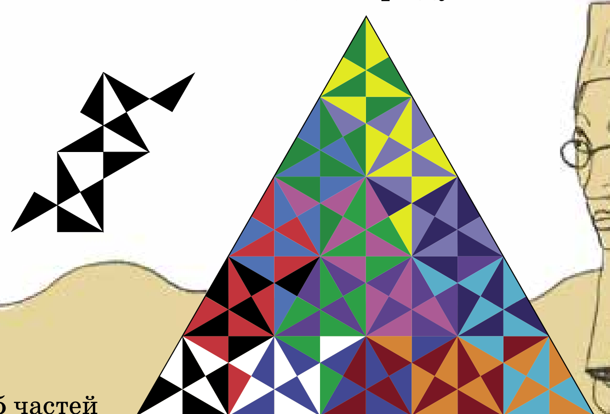
А на сколько ещё равных частей его можно разрезать? Части должны иметь не только одинаковую площадь, но и одинаковую форму: если каждую часть нарисовать на своей прозрачной плёнке, то любые две плёнки должны совмещаться так, чтобы части совпали. (Но часть не обязана быть «сплошной» – она может состоять из нескольких кусков, которые не распадаются, как бы соединённые невидимой плёнкой.)

Разрезание на 5 равных частей придумал несколько лет назад Михаил Патракеев (см. «Квантик» № 5 за 2016 год). Андрей Гаркавый тут же поделил каждую часть пополам и получил разрезание на 10 равных частей. А совсем недавно Павел Гузенко нашёл разрезание на 15 равных частей, а из него получил разрезание на 30 равных частей.

Можно ли разбить правильный треугольник на 7 или 11 равных частей? Неизвестно! Может, вы придумаете?



10 частей

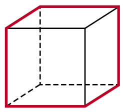


15 частей

Художник Артём Костюкевич

НАШ КОНКУРС, X тур (**«Квантик» № 6, 2020**)

46. *Квантик получил по почте кубическую посылку, запечатанную со всех сторон. Он хочет открыть коробку, разрезав её по рёбрам на две части, но так, чтобы у любой грани было разрезано не более двух рёбер. Удастся ли ему это?*



Ответ: да. Можно разрезать коробку по красным рёбрам, как на рисунке.

47. *Два лифта едут вниз с одинаковой скоростью с 95-го этажа офисного небоскрёба. Второй лифт стартовал через 45 секунд после первого. На этажах с номерами, делящимися на 2 или 3, стоит по сотруднику (остальные этажи пустые). Всем нужно на первый этаж. Лифт, приехавший к сотруднику первым, останавливается на 10 секунд, чтобы его забрать (другой лифт проезжает мимо). Какой лифт раньше попадёт на первый этаж?*

Ответ: второй лифт. Четыре сотрудника на этажах 94, 93, 92 и 90 будут подобраны первым лифтом. После этого первый лифт будет опережать второй на 5 секунд, и на каждом этаже с сотрудником лифты будут «меняться местами».

Разобьём этажи на шестёрки: со 2-го по 7-й, с 8-го по 13-й, … , с 80-го по 85-й. В каждой – 4 сотрудника, и лифты за эти 6 этажей поменяются 4 раза. Тогда лифт, проехавший первым 85-й этаж, первым приедет и на 1-й этаж.

После 90-го этажа первый лифт впереди, он меняется местами со вторым на этажах 86, 87, 88, и на 85-м этаже впереди будет второй лифт.

48. *У фокусника есть две копии «хитрой» клетчатой фигуры. Зритель называет любое целое число N от 2 до 100, и фокусник разрезает первую копию на N клетчатых частей, из которых можно сложить квадрат, а вторую копию – на N клетчатых частей, из которых нельзя сложить квадрат. Приведите пример «хитрой» фигуры и объясните, как разрезать её в каждом из случаев, чтобы фокус удавался. (Все части должны использоваться; наложения частей и дырки не допускаются.)*

Подойдёт прямоугольник 8×32. Разрежем первую копию на два прямоугольника 8×16, а вторую – на два прямоугольника 4×32. Если частей надо больше двух, отрежем ещё от одной половины каждой копии нужное число одиночных клеток, не трогая вторую половину.

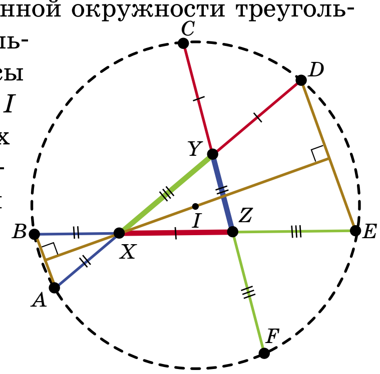
Площадь каждой копии – 256 клеток, а квадрат с такой площадью один – 16×16. Из частей первой копии его легко сложить. А из частей второй копии его не сложишь, ведь одна часть имеет сторону в 32 клетки (что длиннее диагонали квадрата, так как равно сумме двух его сторон).

49. *Каких семизначных натуральных чисел больше: у которых произведение цифр равно 1024 или у которых оно равно 2048?*

Ответ: поровну. Если у семизначного числа N произведение цифр – степень двойки, N состоит из цифр 1, 2, 4, 8. Заменим в N каждую цифру a на цифру $\frac{8}{a}$: то есть 1, 2, 4 и 8 заменим соответственно на 8, 4, 2 и 1. Если произведение цифр у N было 1024, у полученного числа оно будет $\frac{8^7}{1024} = \frac{2^{21}}{2^{10}} = 2^{11} = 2048$. А если у N произведение цифр было 2048, у полученного числа оно будет $\frac{8^7}{2048} = 1024$. Мы сопоставили каждому числу с произведением цифр 1024 своё число с произведением цифр 2048, и наоборот.

50. *Каждую сторону произвольного треугольника продлили в обе стороны так, как показано на рисунке. Докажите, что полученные 6 точек лежат на одной окружности.*

Треугольники AXB и DXE – равнобедренные, а их углы при вершине X – вертикальные. Поэтому биссектрисы их углов при вершине X идут вдоль одной прямой, и эта прямая – серединный перпендикуляр как к AB, так и к DE (в равнобедренном треугольнике биссектриса – это и высота). Тогда расстояние от любой точки этого перпендикуляра до A – такое же, как до B, а до D – такое же, как до E. Аналогично, проведём общие перпендикуляры к CD и FA, а также к EF и BC. Все три перпендикуляра пересекаются в центре I вписанной окружности треугольника XYZ (поскольку это биссектрисы его углов). Так как I лежит на всех трёх серединных перпендикулярах, имеем последовательно: $IA = IB = IC = ID = IE = IF$, то есть I – центр искомой окружности.



РАЗБИЕНИЕ НА ПОДОБНЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ («Квантик» № 7, 2020)

1. Да: например, прямоугольный треугольник с углом 30° (рис. 1).

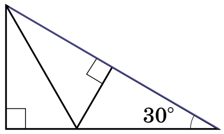


Рис. 1

2. Да. а) Например, прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2 (рис. 2, *а*).

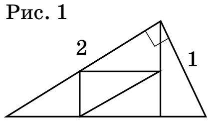


Рис. 2, *а*

б) Рассмотрим равнобедренный треугольник ABC с углом 120° при вершине. Его можно разбить на 5 подобных ему треугольников, как показано на рисунке 2, *б*.

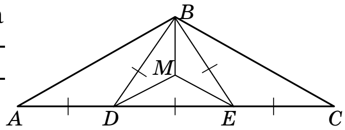


Рис. 2, *б*

3. Возьмём треугольник ABC, в котором $AB \neq AC$. Проведём отрезок $B'C'$ так, чтобы $\angle AC'B' = \angle C$ (рис. 3). Тогда треугольники ABC и $AB'C'$ подобны, причём отрезки $B'C'$ и BC не параллельны. Отметим середину M отрезка $B'C'$. Найдём точку A_1 пересечения прямых AM и BC и построим параллелограмм $AB_1A_1C_1$. Докажите, что отрезки A_1B_1, B_1C_1 и C_1A_1 дают искомое разрезание.

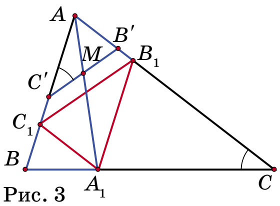


Рис. 3

4. Нет. Назовём треугольник *плохим*, если хоть один из его углов не кратен 20°. На первом шаге оба полученных треугольника – плохие. Но в плохом треугольнике углов, не кратных 20°, хотя бы два. Поэтому при разрезании плохого треугольника по биссектрисе получаются два плохих треугольника. Значит, треугольник, подобный исходному, который плохим не является, ни на каком шаге получить нельзя.

5. Нет. Возьмём подобные прямоугольные треугольники ABC и $A'B'C'$ с углом 60°. В первом проведём высоту CD из вершины прямого угла C, а во втором – биссектрису $B'E$ из вершины угла, равного 60° (рис. 4). Тогда треугольники CBD и $B'EC'$ подобны, а ACD и $A'B'E$ – нет.

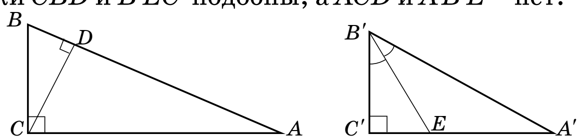


Рис. 4

6. Можно. На стороне AC равностороннего треугольника ABC отметим точку D так, что $\angle ABD = 20°$, а на отрезке BD – точку E так, что $\angle EAD = 40°$ (рис. 5). Тогда треугольники AEB и ADE – равнобедренные с углами при основаниях 20° и 40° соответственно.

Треугольник BDC остроугольный, центр O его описанной окружности лежит внутри него. Вычисляя центральные углы, получаем картинку как на рисунке 5.

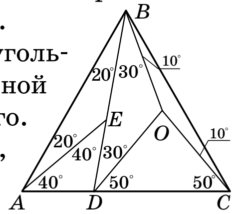


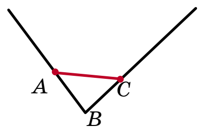
Рис. 5

ПРОЗРАЧНЫЙ БАК? («Квантик» № 7, 2020)

Бак прозрачным не стал: стенки темнеют не от воды внутри, а от воды снаружи. Утром воздух прогревается значительно быстрее, чем вода в баке; и когда бак только наполнили, вода в нём очень холодная по сравнению с воздухом. Вода охлаждает примыкающую к ней часть стенок бака и ближний к ним слой воздуха. В холодный воздух «помещается» меньше водяного пара, чем в тёплый. Лишняя влага из воздуха оседает на стенках – выпадает роса.

ПРЯМОЕ НА КРИВОМ, ИЛИ ПРОГУЛКИ ПО ИСКРИВЛЁННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

1. Две точки по разные стороны от излома можно соединить более коротким путём, чем участок ломаной. Мы нашли противоречие с определением: есть участок ломаной, концы которого можно соединить путём покороче.



2. Пусть есть другой, более короткий путь из B в C (красная линия на рисунке). Тогда можно было бы и из A в D пройти короче, используя новый путь. Раз наш путь из A в D кратчайший возможный, то и любая его часть тоже.

3. Надо проверять. Ведь, например, для ломаной линии из упражнения 1 первые два условия выполнены, а третье – нет.

ЧУКОВСКИЙ, БЭКОН, ЧАЙКОВСКИЙ

Выдумана история про Роджера Бэкона: он жил в XIII веке, а картофель появился в Англии только в XVI веке (после открытия Америки).

ПРО ВАРЕНЬЕ

1. Почти все твёрдые тела и жидкости расширяются при нагревании. Воздух тоже расширяется, если есть куда; если некуда – сильнее давит на то, что его окружает. Под струёй горячей воды крышка нагреется, чуть расширится и станет менее плотно «сидеть» на горловине банки. Чуть нагреется и воздух под крышкой: он расширится и тоже поможет – точнее, не будет мешать, деформируя крышку. Это не помогает, если при закрывании варенье попало на резьбу банки и «склеило» её с крышкой.

Ответим на второй вопрос. Варенье наливали в банку горячим. В банке осталось немного воздуха (он от варенья тоже стал горячим) и водяного пара. Остыв, варенье сжалось совсем чуть-чуть, водяной пар сконденсировался и «впитался» в него, а воздух сжаться не может – он должен занять весь оставшийся в банке объём. Зато теперь он давит на крышку гораздо меньше, чем когда её закрывали. Давление снаружи теперь больше, и крышка прогнётся.

2. Пока воздух в банке нагревался, он всё сильнее давил на воду и стенки, от этого банка «подпрыгивала» и наклонялась. К тому же в банке стало полно горячего водяного пара. Временами части воздуха и пара удавалось «вырваться наружу» – большие пузыри опускались в воду и проходили через горловину банки. Так воздух в банке «спускал» избыточное давление: горячего воздуха для поддержания атмосферного давления нужно значительно меньше, чем холодного («горячий воздух легче холодного» – это отсюда). Когда вода и воздух в банке стали остывать, пар сконденсировался обратно в воду, и давление оставшегося разреженного воздуха стало уменьшаться. Воздух внутри банки давит на воду меньше, чем воздух снаружи – вот вода и поднимается, «заползает» в банку! И будет подниматься до тех пор, пока воздух внутри не сожмётся до первоначальной плотности.

3. Плотность варенья больше плотности воды. Плотность косточки – где-то посредине. Так что косточка «тяжелее воды, но легче варенья». Варенье состоит из воды, слив и сахара, плотность всего этого почти равна плотности воды... однако и варенье, и сахарный сироп заметно тяжелее воды. При растворении сахара в воде молекулы того и другого располагаются ближе друг к другу, «упаковываются» плотнее, чем в воде. Жидкий сахар тяжелее, чем вода и чем сахарный песок, а молекулы воды «вклиниваются» между больших молекул сахара, не очень их раздвигая.

4. Почти поровну – молекул воды всего на четверть больше. Формула молекулы сахара $C_{12}H_{22}O_{11}$, из таблицы Менделеева находим, что массы молекул сахара и воды относятся как $342:18$. Отношение числа молекул сахара и воды $(1500:100)/(342:18)=0{,}8$.

ЗАДАЧА О ШИФРОВАЛЬНОЙ МАШИНЕ

Если в ключе 2 цифры, то в двойном ключе от 4 до 6 цифр, а если в ключе 3 цифры, то в двойном – от 6 до 9 цифр. Тогда если в двойном ключе 4 или 5 цифр, в обычном их 2, а если в двойном ключе 7 или больше цифр, в обычном их 3.

Посмотрим на цифру 3 с двойным ключом 3296. Ввиду сказанного выше длина её ключа равна 2, а также длина ключа каждой из цифр её ключа равна 2. Назовём цифры ключа X и Y.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
3	XY	3296
X	32	
Y	96	

Раз ключ X начинается на цифру 3, двойной ключ X начинается на XY. Однако в списке наших цифр и двойных ключей есть только одна цифра, двойной ключ которой начинается на неё саму, и эта цифра – 3. Значит, $X=3$. Тогда $Y=2$.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
3	32	3296
2	96	63270

Посмотрим на цифру 2. Её ключ кончается на 6, а так как двойной ключ у 6 равен 45703 (5 цифр), длина её ключа равна 2. Значит, ключ у 6 равен последним двум цифрам двойного ключа у 2, а ключ у 9 – оставшимся трём.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
6	70	45703
9	632	703296

Теперь проанализируем 7 и 0 в ключе цифры 6: двойной ключ цифры 0 состоит из 7 цифр, а значит, ключ цифры 0 – из трёх! Тогда ключ цифры 0 – последние три цифры двойного ключа цифры 6, а ключ 7– оставшиеся две!

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
7	45	172230
0	703	4570332

Ключ цифры 7 состоит из двух цифр, а двойной ключ – из 6. Значит, длина ключа и у 4, и у 5 равна 3, то есть ключ цифры 4 – это первые три цифры, а ключ цифры 5 – последние три.

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
4	172	084596
5	230	9632703

Осталось узнать ключи у 1 и 8. «Отрезая» от конца двойного ключа цифры 4 ключи цифр 2 и 7, имеем, что ключ у 1 равен 08, а убирая ключ цифры 0 из начала двойного ключа цифры 1, получаем, что 296 – ключ цифры 8. Готово!

ЦИФРА	КЛЮЧ	ДВОЙНОЙ КЛЮЧ
1	08	703296
8	296	9663270

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач XII тура, с которыми справитесь, не позднее 5 сентября в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: kvan.tk/matkonkurs), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

XII ТУР

56. На бумаге начертили 130 четырёхугольников. Каждый четырёхугольник – или квадрат, или прямоугольник, или параллелограмм, или ромб, или трапеция. Из них 30 – квадраты, 80 – прямоугольники, 65 – ромбы, и 120 – параллелограммы. Сколько всего трапеций было начерчено? (Напомним, что у трапеции две стороны параллельны, а две – нет.)

57. По кругу лежат 4 одинаковые с виду монеты. Две из них фальшивые – они весят 9 г и 11 г, а две настоящие – весят по 10 г каждая. Известно, что фальшивые монеты соседние. За какое наименьшее число взвешиваний на чашечных весах без гирь можно гарантированно определить вес каждой монеты? (Весы лишь показывают, равны ли чаши по весу, и если нет, то какая тяжелее.)

Авторы: Григорий Гальперин (56), Александр Грибалко (57), Борис Кордемский (58), Михаил Евдокимов (59), Сергей Костин (60)

58. У Квантика на даче есть участок треугольной формы. Он решил застелить его газоном. Зная третий признак равенства треугольников, он измерил три стороны участка и заказал треугольный газон с такими сторонами. Но когда заказ был доставлен, Квантик не смог наложить газон на свой участок, хотя длины сторон были в точности как в заказе.

а) Как такое могло быть?

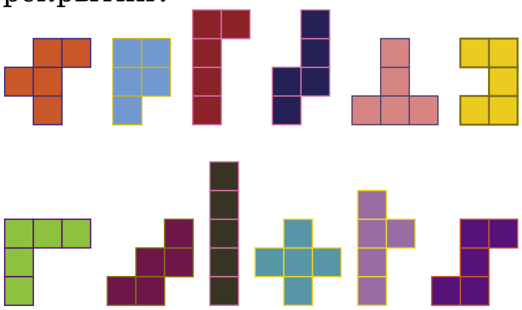
б) Как Квантику исправить ситуацию, разрезав газон не более чем на три части?

59. Вася расставил по кругу в некотором порядке числа 1, 2, 3, ..., 15 и целое число x (не обязательно положительное). Оказалось, что сумма любых двух соседних чисел – квадрат целого числа.

а) Найдите хотя бы одно такое x и нарисуйте соответствующую расстановку.

б) Найдётся ли другое подходящее x?

60. Любую ли фигуру пентамино (см. рисунок) можно дополнить доминошками до клетчатого квадрата без дырок и перекрытий?



Художник Николай Крутиков

Пылесос и короткий шнур

Где-то по периметру прямоугольной комнаты есть три розетки. Маша заметила, что шнур пылесоса довольно короткий: если подключить пылесос к любой розетке, то от неё можно дотянуться максимум на три метра. Тем не менее, Маше удалось пропылесосить всю комнату (удлинителя у Маши нет). Может ли площадь комнаты быть больше 30 м^2?

Автор Михаил Евдокимов

Художник Николай Воронцов

ISSN 2227-7986 20008
9 772227 798206