№ 3 | март 2018

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№3

МАРТ 2018

ГРИБНОЙ СНЕГ

БРЫЗГАЛКИ И МНОГОГРАННИКИ

ПАРАДОКС ПАРРОНДО

Enter

e-mail: kvantik@mccme.ru

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Журнал «КВАНТИК» стал лауреатом

IV ВСЕРОССИЙСКОЙ ПРЕМИИ
«ЗА ВЕРНОСТЬ НАУКЕ»

в номинации

«ЛУЧШИЙ ДЕТСКИЙ ПРОЕКТ О НАУКЕ»

Премия учреждена Министерством образования и науки Российской Федерации

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, плакаты и календари загадок

Подробнее о продукции «Квантика» и о том, как её купить, читайте на сайте **kvantik.com**
У «Квантика» есть свой интернет-магазин – **kvantik.ru**

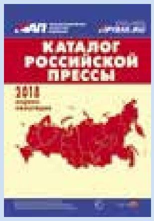
Подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете в любом отделении связи Почты России и через интернет!

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Индекс **84252** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

Самая низкая цена на журнал!

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП



Индекс **11346** для подписки на полгода или на несколько месяцев полугодия

По этому каталогу также можно подписаться на сайте **vipishi.ru**

Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте **nasha-pressa.de**

Подробнее обо всех способах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska.html**

www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 03, март 2018 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С.А.Дориченко
Редакция: В.Г.Асташкина, В.А.Дрёмов, Е.А. Котко, И.А.Маховая, А. Ю. Перепечко, М.В.Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р.К.Шагеева, И.Х.Гумерова
Обложка: художник Евгений Паненко

Учредитель и издатель:
Частное образовательное учреждение дополнительного профессионального образования «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 795-11-05, e-mail: kvantik@mccme.ru, сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
• Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
• «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 5000 экз.
Подписано в печать: 15.02. 2018
Отпечатано в типографии ООО «ТДДС-Столица-8»
Тел.: (495) 363-48-84
http://capitalpress.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Грибной снег. *В. Птушенко* — **2**

Парадокс Паррондо. *А. Алаева* — **12**

СВОИМИ РУКАМИ

Брызгалки и многогранники.
Д. Панов, А. Пушкарь, Д. Чебасов — **8**

ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ

Надутая бутылка. *А. Бердников* — **15**

Гонки на клеёнке. *Г. Гальперин* — **IV с. обложки**

ДВЕ ТРЕТИ ПРАВДЫ

Брамс, Карузо, Венявский. *С. Федин* — **16**

МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК

Разобьём на равнобедренные треугольники. *А. Блинков* — **18**

ОЛИМПИАДЫ

Избранные задачи Нижегородской (XV открытой) математической олимпиады — **23**

Наш конкурс — **32**

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Монеты и русская литература. *М. Гельфанд* — **24**

ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ

Сломанная веточка и другие симметриксы. *В. Красноухов* — **26**

ОТВЕТЫ

Ответы, указания, решения — **28**

Василий Птушенко

ГРИБНОЙ СНЕГ

– Грибной снег, – задумчиво произнёс Витя, отхлёбывая из большой кружки глоток горячего чая.

За окном творилось что-то необычное: время от времени налетал шальной порыв ветра, грозя смести крышу вместе с домом, а с неба вдруг начинал сыпать снег. Но яркое, уже почти весеннее солнце продолжало светить в окно. А буквально через полминуты эта удивительная снежная метель при ярком солнце прекращалась – так же неожиданно, как и началась. После вчерашнего мрачного дня – без солнца и с постоянным снегом – это было особенно приятно.

– Это ты о чём? – Федя оторвал взгляд от окна.

– Да о снеге! Помнишь, как моя бабушка говорит, когда солнце и дождь одновременно: грибной дождь.

За спинами у мальчиков скрипнула дверь, и из-за неё показалась борода дяди Тимофея.

– Вы сейчас дождётесь, что дождь пойдёт, грибной. Последние хорошие зимние дни! Полдень уже скоро – а вы всё сидите! Давайте-ка быстро допивайте чай, хватайте лыжи в кладовке и айда на улицу!

Через несколько минут ребята выскочили из дома. Дядя Тимофей уже ждал их.

– Отлично! Проведу вас по самым красивым местам. Во-о-н там, за полем – небольшая просека, а за лесом – поля да холмы на многие километры, всё вокруг как на ладони видно. Пройдём через Багримово, а дальше на Самарово выйдем, там самые красивые виды.

Лыжи весело скрипели по снегу. Снег искрился на солнце, и только голубоватые тени от стеблей не полёгшей за зиму прошлогодней травы да тоненьких стволов молодого березняка время от времени нарушали сверкающую золотисто-белую картину.

Вдруг Федя остановился. Витя, ехавший сзади, чуть не налетел на него.

– Смотри! – указал Федя куда-то в сторону торчащих из-под снега стеблей. – Что это?

Этот рассказ — одна из историй в серии «научных приключений» двух ребят. Другие истории этой серии опубликованы в книге В.В. Птушенко «Физические новеллы», см. http://kdu.ru/taxonomy/term/562

– Как «что»? Трава какая-то прошлогодняя, высохшая. Это ты из-за неё остановился? Я едва успел затормозить, чтобы не врезаться в тебя!

– Да нет, я не про траву, ты на снег под ней посмотри! Что это от неё тянется такое тёмное?

– Это? Тень, конечно! Что же ещё!

– А это тогда что такое? – И Федя указал палкой на вторую, почти такую же тонкую тёмную полоску на белом снегу, тянущуюся от основания стебелька в другом направлении.

– Это? – Витя замер перед открывшейся картиной. – Т-тоже тень. Кажется, – пробормотал он. – Но… не может же быть две тени!

– Нет, погоди, – произнёс, наконец, Федя. – Вон та, дальняя – это тень, а ближняя – это полоска на снегу, как будто кто-то прочертил по нему палкой!

– Да, вижу, как будто маленький ров в снегу, с полсантиметра глубиной или чуть побольше. Но кто их мог нарисовать так ровно? И, главное, на снегу ни одного следа, сюда никто не подходил до нас!

– Что вы тут застряли, ребята? – раздался за спиной голос дяди Тимофея. – Я уже почти до леса добежал, хорошо, что оглянулся вовремя.

– Да мы тут нашли…

– Ого! Вижу. Ну, вам повезло. Сколько лет зимой по полям да лесам езжу, а такого не встречал! Необыкновенное явление!

– Как же оно могло получиться?

– А я знаю, Вить! – Федя себя хлопнул варежкой по лбу. – Помнишь грибной снег? Несколько раз сегодня

шёл, буквально по минуте или даже меньше, и ветер сильный дул. И везде на поле снег лёг, а где стебли загораживали, там – нет. Вот и остались «дырки».

– Хм, ветровая тень образовалась, хочешь сказать? Хорошая идея.

– Да нет, погодите, – опомнился Виктор. – Посмотрите, какой ровный след! А ветер – он же крутит, вьётся! Мы же с вами даже вчера в окно видели, как от него маленькие вихри снега над землёй кружились.

– Ну, не всегда же он крутит! Бывает, что направление ветра держится без изменений очень долго. Тем более, сегодня были очень короткие порывы ветра.

– Всё равно такие ровные края не могут быть. Вы посмотрите, какое точное изображение на снегу – прямо как фотография!

– А может, снежинки были крупные и тяжёлые? – предположил Федя. – Чем тяжелее предмет, тем ровнее летит. И потом, подумаешь, точное изображение – просто прямая палка, было бы что изображать!

– Боюсь, Фёдор, тут ты не прав, – задумчиво произнёс дядя Тимофей. – Оглянись-ка назад.

Ребята обернулись: посреди поля, совсем рядом с ними, росло несколько маленьких берёзок – от метра

до трёх высотой. И – от каждой! – тянулся загадочный отпечаток. Как на старинной гравюре, каждая веточка была словно тонким резцом художника прорисована на снегу. Несколько мгновений ребята молча разглядывали эту удивительную картину.

– А может быть, что это настоящая тень, тень от солнца, так отпечаталась на снегу? – прервал молчание Витя. – Выглянуло солнце, и снег протаял.

– Тогда было бы всё наоборот: по всему полю он стаял, а в тени валики остались, а не ямки!

– Да-а, правда... – Виктор задумался.

– Ну и, потом, солнце ведь сегодня почти весь день на небе, – заметил дядя Тимофей. – Значит, оно и сейчас растапливало бы снег везде, кроме тени. Так что твоя гипотеза не проходит. Если это и тень, так странно проявившаяся, то что-то должно было ещё произойти, чтобы запечатлеть её именно в тот момент.

– А, я понял: снег пошёл! И – прилип. Там, где было солнце и всё растаяло, там прилип, а в тени – нет!

– Молодец, интересная идея! Но, боюсь, тоже неправдоподобная.

– Почему?

– А ты пощупай снег рукой. Вот прямо здесь, на солнце. Ну, как тебе кажется, тает он?

– Нет, – смущённо пробормотал Виктор. – Ну, а может, он хотя бы чуть-чуть разогревается всё-таки? Я этого не чувствую, а падающий снег – да.

– А вот это уже гипотеза, которую мы можем проверить. Я обычно беру с собой термометр, чтобы знать, какой мазью лыжи смазывать. – Дядя Тимофей скинул с плеча рюкзак и достал из бокового кармана небольшой диск с красно-синей шкалой по краю и стрелкой. – Он самый простой и не очень точный, но для нашей задачи хватит. Вить, положи его на снег, пожалуйста. Вон туда, в тень от самого толстого ствола. Прикопай чуть-чуть, но не сильно, чтобы мы его нашли потом.

– А мы что, оставим его тут?

– Сразу мы ничего не заметим, он не очень чувствительный. А за пару часов снег, выйдя из тени, успеет сильнее разогреться.

Всю остальную дорогу мысль о загадочных «тенях» на снегу не оставляла ребят. Каждое новое

впечатление порождало новые идеи, и в каждой мерещился ответ на вставшую перед ними загадку.

Проезжая под веткой, низко наклонившейся от налипшего на неё снега, Фёдор машинально стукнул по ней палкой – и целый сугроб свалился вниз, «пробив» под собой в рыхлом снегу длинный след.

– О, Вить, смотри! Вот оно, изображение! Может, наши так же появились?

– Так тут-то у тебя изображение внизу, прямо под веткой, куда снег падал, а там – сбоку.

– А может, это порыв ветра сдул снег, который налип на стволах, и шмякнул его в снег под деревьями?

– Может, конечно, только у тебя след не очень-то ровный получился.

– Это я неаккуратно ветку толкнул, закачалась...

А когда кончился лес, начались луга. Местами они начинали зарастать – берёзками или ивняком, и как у молоденьких ив сверкала на солнце кора! – прямо как зеркальца, хотя и тёмные. И сразу у ребят возникла мысль, не могут ли стволики отражать свет и за счёт этого растапливать снег вокруг себя? У Вити оказалась на ремне блестящая пряжка, с которой сразу можно было проверить эту идею. Увы, растопить снег ею не удалось.

* * *

Когда они вернулись к оставленному термометру, тот явно прогрелся – показывал на несколько градусов выше, чем когда они положили его в тень.

– Ну, что я говорил! – обрадовался Виктор.

– Боюсь, показания термометра всё же не в пользу твоей гипотезы, – остановил его дядя Тимофей. – Во-первых, наш результат слегка завышен, ведь и сам термометр мог греться на солнце. Но несколько градусов – правдоподобная величина, именно на столько может прогреваться снег за несколько часов. Такие измерения много раз проводили и при научных исследованиях, и при зимних спортивных соревнованиях. Но ведь тени от веточек совсем тоненькие, и они движутся вместе с солнцем. Вот пока мы стоим, вы не смотрели на них? На какое время такая тень закрывает участочек снега, прежде чем «убежит» с него?

– На несколько минут?

– Да. А если совсем тонкая веточка, то и того меньше. Можно себе представить, как мало успеет измениться температура в такой тени за такое короткое время.

– Ну, хорошо, с нагревом не получается. А остальные идеи как-то можно проверить?

– Давайте попробуем. Сейчас вернёмся домой, может, найду вам что-нибудь для экспериментов.

* * *

Вечером на небе висела луна, сверкали звёзды. Снег поскрипывал под ногами от мороза. Виктор, последний раз глянув в ночное небо, открыл дверь и зашёл в дом.

– Ну как?

Фёдор сидел за столом, крутя в руках пульверизатор для опрыскивания цветов.

– Получается плохо. Я думал вместо снега, который сдувается ветром, сделать поток брызг от пульверизатора. Чтобы так же летели и тени от предметов создавали. Так он слабый совсем, весь поток почти сразу просто в облако превращается!

– Может, капли покрупнее надо сделать? Чтобы потяжелее были?

– Пробовал. Тут можно немного отверстие в пульверизаторе настроить. Так они разбрызгиваться начинают. Эх, нужно что-то твёрдое. Манку, например. Или – знаешь, есть такие машины, которые сами снег делают и разбрасывают, на горнолыжных склонах?

– Так кто ж нам такую даст!

– Понятно, что никто. Вот и поди придумай, как такой эксперимент дома поставить!

* * *

А назавтра снова повалил снег. Не «грибной», а настоящий, зимний, густой. Когда ребята смогли добраться до вчерашней полянки, никаких загадочных следов на снегу видно не было.

– Эх, как же так! – сокрушался Федя. – Такая красота была, и уже исчезла! А особенно от этих веточек – помнишь, Вить?

– Ага, прямо как цветок на снегу был! Такой большой, а тени от этих веточек – как листья.

– Да, следы в памяти – крепче, чем на снегу, – улыбнулся дядя Тимофей. – И как они там так точно запечатлеваются и так долго живут – тоже загадка!

Фото автора
Художник Мария Усеинова

Дмитрий Панов,
Александра Пушкарь,
Дмитрий Чебасов

БРЫЗГАЛКИ и МНОГОГРАННИКИ

Этот текст написан по мотивам статьи «Вдогонку лету» из «Квантика» №10 за 2017 год, где было рассказано, как из трубочек и маленьких резиновых колечек для плетения сделать простую брызгалку.

Здесь мы используем те же самые материалы и технологии для проведения геометрических построений. Подходящие для наших экспериментов трубочки продаются в магазине «Весёлая затея» и называются там палочками для воздушных шаров. Они достаточно длинные – 37,5 см – и при этом одновременно жёсткие и упругие. Маленькие резиновые колечки для плетения продаются практически в любом магазине.

Сначала мы взяли три трубочки и попарно скрепили их концы резиновыми колечками. Получился равносторонний треугольник (рис. 1). А почему бы не собрать из тех же трубочек квадрат? И вот тут нас ожидал сюрприз. Мы соединили как надо четыре одинаковые трубочки, но это был не совсем квадрат или даже совсем не квадрат. Если положить эту конструкцию на стол, она мгновенно превращается в ромб, а если приподнять за вершину, то и вовсе перестаёт быть плоской фигурой (рис. 2). Мы назвали этот четырёхугольник непослушным квадратом.

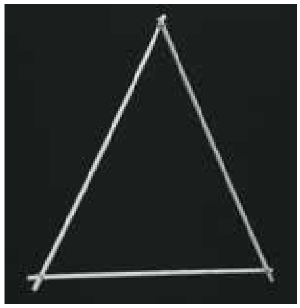


Рис. 1.
Равносторонний треугольник

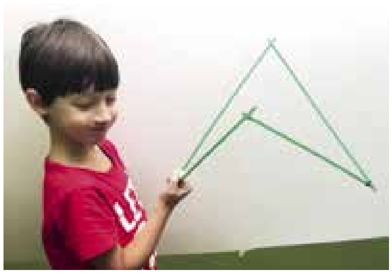


Рис. 2.
Непослушный квадрат

Математики называют фигуры, которые легко меняют свою форму, *изгибаемыми*. Так вот, треугольник, состоящий из трёх отрезков, жёсткий – *неизгибаемый*, а квадрат и любой четырёхугольник, и пятиугольник, и шестиугольник и т.д. – *изгибаемы*. Это хорошо известный факт, и мы смогли убедиться в нём с помощью трубочек и резиночек.

А почему бы теперь не собрать что-нибудь пространственное? И мы легко собрали из трубочек самый простой многогранник – треугольную пирамиду (рис. 3). Правда, в математике многогранником называют другой объект – каркас вместе с гранями-многоугольниками (рис. 4).

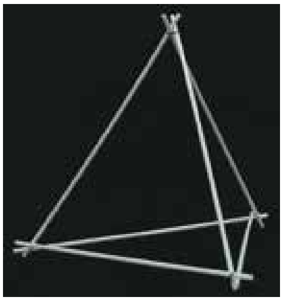


Рис. 3. Каркас пирамиды

Рис. 4. «Настоящая» пирамида

При этом общие отрезки соседних граней называются рёбрами – они соответствуют нашим трубочкам. А точки, где сходятся несколько рёбер, называются вершинами – можно сказать, что это наши резиночки.

Вот ещё два замечательных многогранника: из 12 трубочек собирается октаэдр, у него 8 граней, а из 30 трубочек – икосаэдр, у него 20 граней (рис. 5).

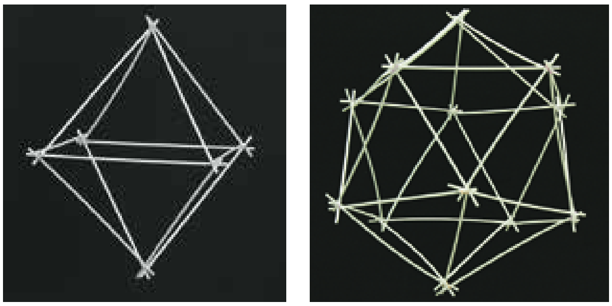


Рис. 5. Трубчатые октаэдр и икосаэдр

У всех трёх собранных многогранников все грани треугольные, и эти многогранники неизгибаемые.

Теперь попробуем собрать из трубочек куб. Посмотрите на рисунок 6: этот куб совсем не держит форму – он изгибаем, и изгибаем совершенно чудовищным образом. Мы назвали его разболтанным кубом.

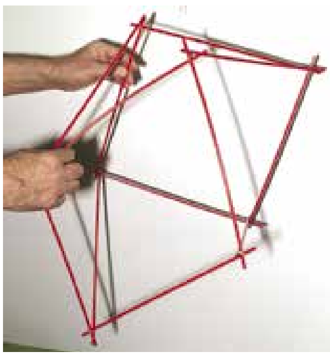


Рис. 6. Разболтанный куб

А если без шуток, то тут возникает серьёзный математический вопрос: какие многогранники, собранные из трубочек, изгибаемы, а какие нет? Конечно, трубочки и резиночки могут что-то подсказать, но различных многогранников слишком много, чтобы без строгого доказательства доверять этим подсказкам. У нас появились кое-какие предположения, но мы не были уверены в них.

К счастью, сейчас в интернете есть места, где на трудный математический вопрос можно получить квалифицированный ответ. Самое известное из них – сайт профессиональных математиков MathOverflow. Там обсуждаются многие вопросы, связанные с современными математическими исследованиями, а также нерешённые математические проблемы, но совсем не приветствуются вопросы непрофессиональные или вопросы типа домашних заданий. С некоторой опаской мы обратились туда и спросили: если взять выпуклый многогранник, то есть многогранник без впадин (рис. 7), и убрать из него все грани, а оставить только рёбра (тогда как раз получится что-то вроде нашего многогранника из трубочек), в каком случае он будет изгибаемым, в каком – нет?

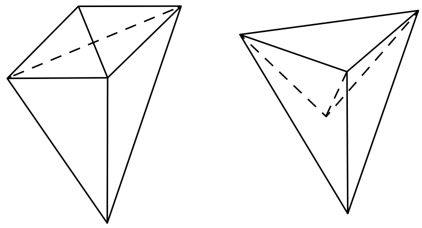


Рис. 7. Выпуклый многогранник – без впадин, а у невыпуклого впадины имеются

Нас порадовало, что ответ был получен, и довольно быстро. Как мы и предполагали, если в многограннике есть хоть одна не треугольная грань, он будет изгибаемым, а если все грани треугольные, он – жёсткий.

Обсуждение нашего вопроса на MathOverflow[1] было очень интересным. В самом начале было сказано, что из теоремы Коши следует неизгибаемость трубчатого выпуклого многогранника. После этого Джозеф О'Рурк[2] привёл пример многогранника с квадратной гранью, который, как он считал, неизгибаем (рис. 8).

[1] Если вы знаете английский, можете посмотреть это обсуждение, набрав в Google «Rigidity of convex polyhedron in R3 with faces removed».

[2] На MathOverflow каждому участнику добавляют очки за популярные вопросы и популярные ответы. Среди 64 000 участников О'Рурк по популярности идёт на третьем месте, у него 80 000 баллов.

Мы собрали этот многогранник из трубочек (рис. 9), и оказалось, что О'Рурк ошибся – многогранник прекрасно изгибался.

А затем Антон Петрунин[3] привёл простое доказательство изгибаемости трубчатого многогранника, у которого есть хотя бы одна не треугольная грань. В своем доказательстве он использовал теорему А. Д. Александрова. Вот так был получен ответ на наш вопрос.

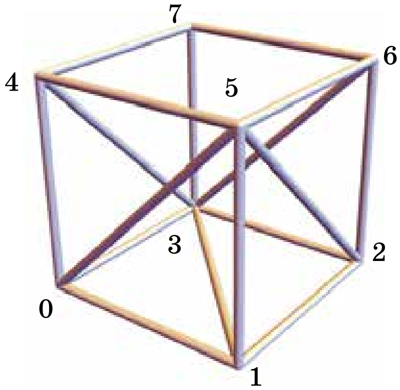


Рис. 8. Многогранник О'Рурка

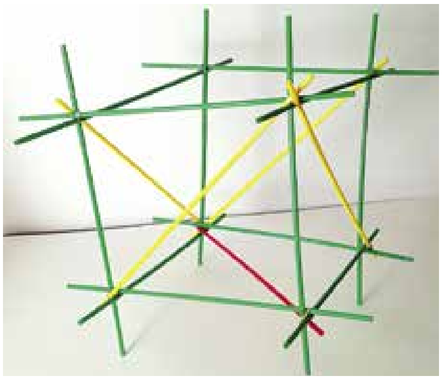


Рис. 9. Многогранник О'Рурка изгибаем

Упомянутые здесь теоремы Коши и Александрова – самые знаменитые в теории многогранников. Их формулировки достаточно просты, а доказательства доступны старшим школьникам. Советуем почитать книжку Н. Долбилина[4] «Жемчужины теории многогранников» (М.: МЦНМО, 2012), посвященную доказательствам этих теорем и рассчитанную на школьников.

Несколько слов в заключение. Важным классическим вопросом является вопрос о жёсткости и изгибаемости настоящих многогранников – многогранников с гранями. Здесь есть красивая теория с большой историей и с неожиданными открытиями, частично доступная школьникам. Советуем прежде всего посмотреть в интернете популярную лекцию «Изгибаемые многогранники и кузнечные мехи», год назад прочитанную Александром Гайфуллиным[5] на XXVIII Математическом празднике в Москве для 6- и 7-классников.

[3] А. Петрунин – один из авторов журнала «Квант», профессор университета Penn State.

[4] Н. П. Долбилин – ведущий научный сотрудник Математического института им. В. А. Стеклова, автор статей в «Кванте» и «Квантике».

[5] А. Гайфуллин – сотрудник механико-математического факультета МГУ, член-корреспондент Российской академии наук.

Фото: Дмитрий Чебасов
Художник Алексей Вайнер

ПАРАДОКС ПАРРОНДО

Амелия Алаева

Дождливая и неинтересная суббота. Родители уехали по делам, оставив Машу с Барсиком.

«И что же мне делать?», – грустно подумала Маша. Интернет! Нет, Маша не тратила время бездумно. Любимый сайт – Википедия. Любимая ссылка – «случайная статья». В прошлый раз Маша случайно узнала, что такое Кбал-Чхай. С приятным нетерпением Маша ткнула мышкой, и из недр интернета вылезло:

ПАРАДОКС ПАРРОНДО. *Возможно выиграть, играя поочередно в две заведомо проигрышные игры.*

Маша мало что поняла, запомнила лишь, что обнаружил это испанский физик Хуан Паррондо.

Иван Петрович вернулся из Барселоны в понедельник ранним вечером, и уже через час Маша, привстав на цыпочки, терзала кнопку его звонка. По блеску в Машиных глазах Иван Петрович сразу понял, что рассказом о Балеарском море от Маши не отделаться.

– Ну, Марья… Что на этот раз?

– Парандокс. То есть парроксондо. То есть парадокс Паррондо. Это когда играешь-играешь и каждый раз проигрываешь, а вместе – выигрываешь. Это как?

– Хм, подруга… везёт тебе на парадоксы. Основная идея Паррондо состоит в том, что… – размеренная речь профессора прервалась, когда он увидел Машины глаза. В них было ясно написано, что пора переходить к сути.

– Допустим, у тебя есть несколько игр, причём каждая из них проигрышная: играя в неё много раз подряд, ты в итоге останешься в проигрыше. Если ты периодически или случайно меняешь эти игры, связанные между собой, скажем, общим капиталом, то получается сложная, так сказать, комбинированная игра. И вот эта сложная игра может оказаться выигрышной, то есть в ней ты при длительной игре выигрываешь. Не всегда, конечно. При некоторых условиях.

– Да-да, это я поняла, но дальше не поняла. Почему? – У Маши от любопытства задымилась резинка, стягивающая волосы в хвост.

– Возьмём две игры *A* и *B* с простыми правилами.

А. *Ты выигрываешь 3 рубля, если у тебя чётное количество рублей, иначе проигрываешь 2 рубля.*

B. *Ты проигрываешь 2 рубля, если у тебя чётное число рублей, иначе выигрываешь 3 рубля.*

Обе эти игры проигрышны. Если у тебя, допустим, 100 рублей и ты сыграешь в игру *A*, что произойдёт?

– Так... 100 – чётное число, значит, я получу 3 рубля. Какие же это проигрышные игры? Я ведь только что 3 рубля выиграла!

– А ты посмотри, что будет, если ты продолжишь играть – посоветовал Иван Петрович

– Теперь у меня 103 рубля, число нечётное: $103-2=$ $=101$, опять число нечётное: $101-2=99$. Это что же получается? Я теперь всегда проигрывать буду?

– Именно. Игры-то, по сути дела, проигрышные!

– Но подождите! Я ещё не проверила игру *B*.

– Там будет то же самое, – заверил профессор.

– А! Я поняла! Эти игры связаны с чётностью. Если я их буду чередовать, то тогда смогу выиграть. Если у тебя вначале чётное количество монет, то следует начинать с игры *A*, потом играть в *B*, затем опять в *A*... Тогда я буду выигрывать аж по 3 рубля за каждую игру!

– Да, но заметь, что если бы ты наугад с равной вероятностью выбирала игры, то твой средний выигрыш за игру был бы равен 1/2 рубля. Действительно, неважно, чётное у тебя число рублей или нет: ты всегда в одной из игр получаешь 3 рубля, а в другой теряешь 2. Тогда, сыграв, скажем, 100 игр, ты выиграешь в 50 из них и получишь около $50 \cdot 3 - 50 \cdot 2 = 50$ рублей.

– Иван Петрович, у меня как раз есть 100 рублей. Немедленно начинаем.

– Видишь ли, дорогая Маша... Нужно, чтобы ещё и противная сторона была согласна.

– Это кто здесь противный? Иван Петрович, вы очень милый, – горячо запротестовала Маша. – Эх, а всё равно тут нет никакого парадокса. Вот найти бы настоящий парадокс, чтобы ух!

– Верно, парадокса нет, просто такая модель игры, а парадоксом её назвали из-за внешней удивительности. Ты же сама сначала удивилась – как это можно выиграть, всё время проигрывая.

– Удивилась – не то слово. Чуть не сгорела от любопытства, – пожаловалась Маша, демонстрируя обугленную резинку. Но тут её посетила новая мысль.

– А бывает парадокс Паррондо в жизни?

– Недавно биологи заметили подобные странные на первый взгляд явления. Некоторые вирусы погибают при слишком высоких и при слишком низких температурах. Однако если температура случайным образом скачет от слишком высокой к слишком низкой и наоборот, то вирусы выживают.

А ещё в экономике известно, что если акции двух компаний падают, то владелец акций каждой из компаний по отдельности в проигрыше. Но бывает так, что продавая одни убыточные акции и покупая другие убыточные, а потом наоборот, можно получить выигрыш.

– Иван Петрович, мне кажется, что этот парадокс очень тесно связан именно с играми и капиталом.

– Наверно, ты права. Общее свойство игр, в которых возникает парадокс Паррондо, – асимметричное смешивание случайных процессов. Иногда асимметрия может сделать из хаоса порядок, а из проигрыша – выигрыш. Кстати, помнишь, недавно мы разбирались в парадоксе двух конвертов[1]? Так вот, в нём тоже присутствует асимметрия. Когда оба конверта запечатаны, они одинаковы для тебя. Но как только ты вскрываешь один из них, симметрия ломается, и они уже для тебя неодинаковы. На этом построена одна из выигрышных стратегий – чем больше сумма в открытом конверте, тем с меньшей вероятностью надо менять конверт.

Маша посмотрела на часы:

– Ой! Уже поздно, мама, наверно, будет сердиться. Мне нужно обедать, кормить Барсика, пылесосить квартиру... ещё в химчистку, за хлебом... – Маша пятилась к входной двери, на ходу бормоча объяснения столь поспешному бегству, но думая совершенно о другом: Википедия! Скорее. В этот раз статья не будет случайной. Интересно, как пишется – «осеметрия» или «ассиметрия»? Ладно, разберёмся.

Вдогонку из-за уже захлопнувшейся двери Маша услышала Ивана Петровича:

– Асимметрия, голубушка! А-сим-метрия. Одно «с» и два «м». начинается с «А». Хе-хе...

[1] См. «Квантик» № 8 за 2016 г.

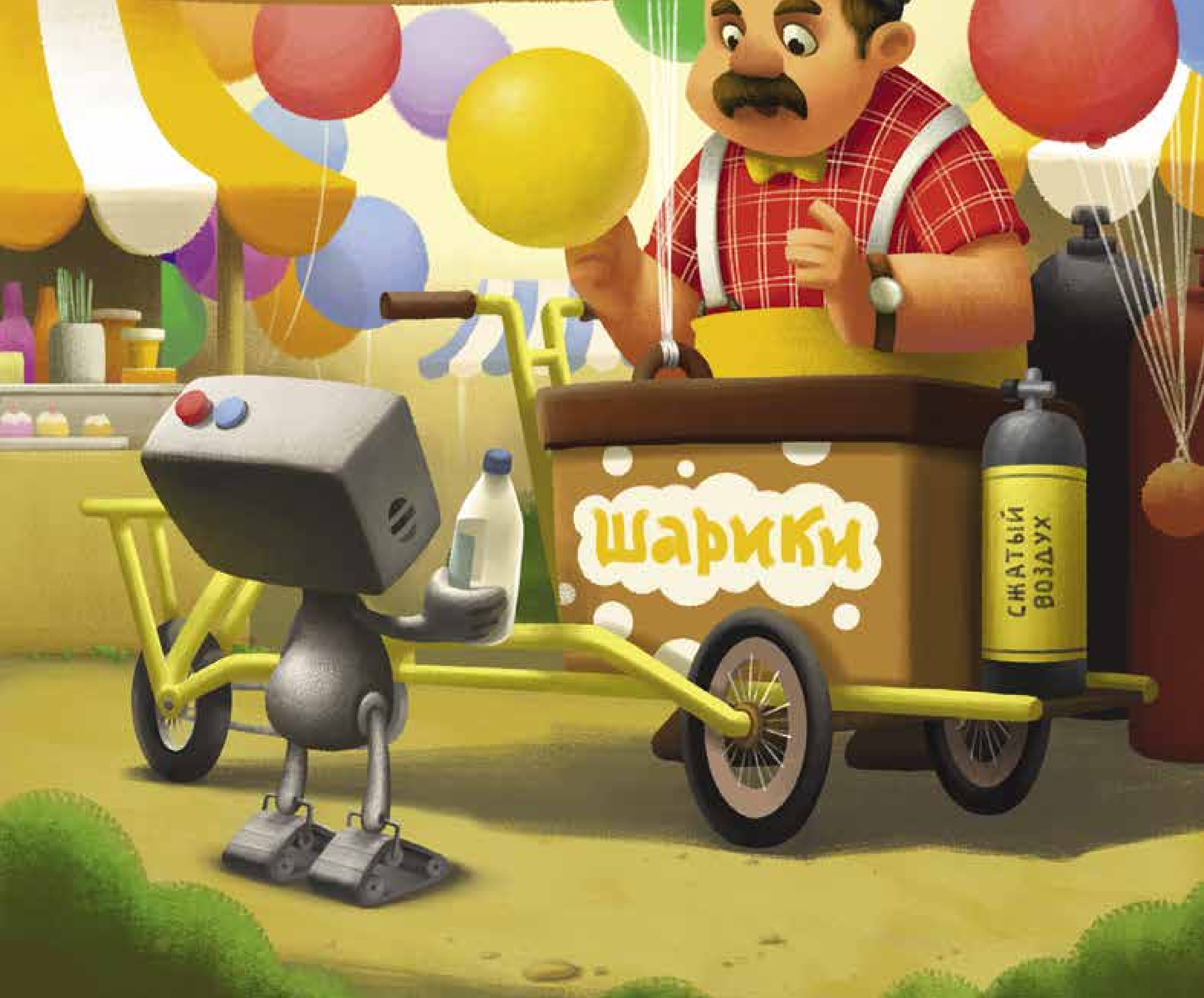
Художник Маргарита Кухтина

Надутая бутылка

Имеется обычная пластиковая бутылка с завинчивающейся крышкой. Ни бутылку, ни крышку не разрешается резать, и в бутылку не должно попадать ничего, кроме воздуха. Нужно добиться того, чтобы давление в бутылке стало процентов на 10 больше атмосферного, но чтобы бутылка в этот момент была закрытой и осталась той же формы, температуры и пр. Предложите самый простой способ достичь этого.

Автор Александр Бердников

Художник Мария Усеинова



БРАМС, КАРУЗО, ВЕНЯВСКИЙ

Сергей Федин

Две из этих историй известны, а одна полностью придумана. Надо догадаться, какая именно. Вычислить её можно по какой-нибудь нелепости, несуразности, спрятанной в тексте. Попробуйте!

БРАМС

Однажды, когда знаменитый немецкий композитор Иоганнес Брамс был ещё молодым, его издатель недовольно сказал ему:

– Что это вы всё время пишете такую грустную музыку? Попробуйте написать что-нибудь бодрое и жизнерадостное! Может быть, тогда и продажи ваших произведений пойдут веселее?

– Хорошо, я попробую, – вздохнул Брамс.

Через несколько дней он снова пришёл к издателю, держа под мышкой папку с новым произведением.

– Ну что, получилось? – с надеждой спросил издатель.

– Не уверен, – ответил композитор, – но я очень старался.

Издатель в нетерпении раскрыл папку. Новое творение Брамса называлось «Весело схожу я в могилу».

КАРУЗО

Великий итальянский оперный певец Энрико Карузо в юности поплыл на пароходе в Америку. Однако по пути корабль потерпел крушение, и Карузо оказался на необитаемом острове. Две недели он боролся за жизнь и не умер от голода и холода только благодаря своей находчивости.

На острове он научился есть саранчу, которую поджаривал на костре. Огонь близорукий Карузо разжигал с помощью очков, используя их как лупу.

А чтобы побороть одиночество, Карузо всё время пел. Именно пение и спасло ему жизнь. Прекрасный голос Карузо услышали на проплывающем мимо военном корабле. Так он вновь оказался среди людей.

Эта история для Карузо имела такие последствия. Во-первых, он уже не мог без пения и стал оперным певцом. А во-вторых, он, в подражание Даниэлю Дефо, написал книгу о своих приключениях на необитаемом острове под названием «Робинзон Карузо».

ВЕНЯВСКИЙ

Однажды выдающийся польский скрипач Генрик Венявский давал концерт в Петербурге. После выступления, как всегда блестящего, к нему подошёл некий покровитель искусств и пригласил к себе домой на чашку чая.

– Да, – добавил он, видимо рассчитывая получить бесплатный концерт в придачу, – и захватите с собой скрипку.

В ответ скрипач лишь тонко усмехнулся и сказал:

– Благодарю вас от лица моей скрипки, но она чая не пьёт.

Художник Капыч

Александр Блинков

РАЗОБЬЁМ НА РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Семиклассникам часто предлагают задачи, в которых прямая разбивает (разрезает) треугольник на два равнобедренных. Основная трудность при их решении – возникает много случаев, и трудно ни один не упустить. Поэтому полезно провести небольшое исследование: какие случаи возможны и что в каждом из них можно узнать об углах исходного треугольника.

Разрез, делящий треугольник на два треугольника, должен идти через вершину. Пусть в треугольнике ABC отрезок CD разбивает его на два равнобедренных треугольника ACD и BCD. Один из углов ADC или BDC, очевидно, не будет острым. Пусть для определённости $\angle ADC \geqslant 90°$; тогда основанием равнобедренного треугольника ACD может быть только отрезок AC. В треугольнике BCD любая из сторон может служить основанием, и возникают три случая (рис. 1, *а*–*в*).

Обозначив углы A и B треугольника ABC через α и β соответственно и отметив равные стороны и углы при основаниях в равнобедренных треугольниках, получим:

1) BC – основание треугольника BCD (рис. 1, *а*). Тогда медиана CD в два раза меньше, чем AB, значит, $\boldsymbol{\angle ACB = 90°}$. Таким образом, треугольник ABC – прямоугольный, α и β **– острые углы, сумма которых равна 90°**.

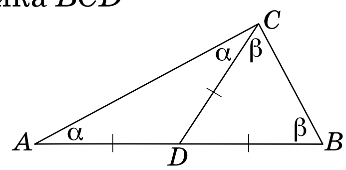


Рис. 1, *а*

2) BD – основание треугольника BCD (рис. 1, *б*). Тогда угол BDC – внешний для треугольника ACD, и $\beta = 2\alpha$, причём оба этих угла острые, значит, $\boldsymbol{\alpha < 45°}$. Угол ACB может быть острым, прямым или тупым, но $\boldsymbol{\angle ACB} = 180° - 3\alpha > \boldsymbol{45°}$.

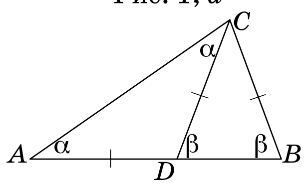


Рис. 1, *б*

3) CD – основание треугольника BCD (рис. 1, *в*). Тогда $2\alpha < 90°$, то есть $\alpha < 45°$, $\beta = 180° - 4\alpha$ и может быть любого вида. Угол ACB также может иметь любой вид, но $\angle ACB = 3\alpha$, поэтому $\angle ACB < 135°$.

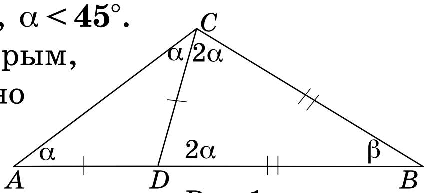


Рис. 1, *в*

Применим эти результаты к конкретным задачам.

Задача 1 (Д. Шноль). *Один из углов треугольника равен 40°. Известно, что его можно разбить отрезком на два равнобедренных треугольника. Найдите остальные углы данного треугольника.*

Решение. Пусть в треугольнике ABC угол A равен 40°, а отрезок CD разбивает его на два равнобедренных треугольника ACD и BCD. В соответствии со сказанным выше, получим:

1) $\angle B = 50°$; $\angle C = 90°$ (рис. 2, *а*).

2) $\angle B = 80°$; $\angle C = 60°$ (рис. 2, *б*).

3) $\angle C = 120°$; $\angle B = 20°$ (рис. 2, *в*).

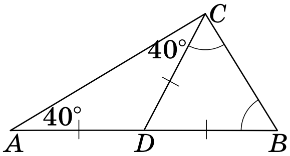


Рис. 2, *а*

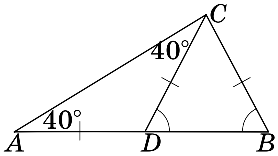


Рис. 2, *б*

Всё? Нет, необходимо учесть, что при таком разбиении тупым может оказаться угол BDC! Значит, ещё три случая? Нет, всего два (*подумайте, почему*).

4) $\angle B = 20°$; $\angle C = 120°$ (рис. 2, *г*). *Ответ в этом случае совпал с предыдущим. Почему?*

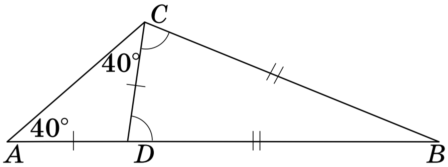


Рис. 2, *в*

5) $\angle B = 35°$; $\angle C = 105°$ (рис. 2, *д*).

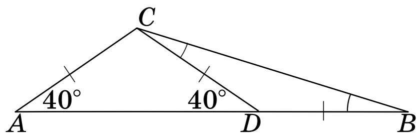


Рис. 2, *г*

На этот раз всё? А если разрез проходит через вершину заданного угла? Соотнесём условие задачи с нашим исследованием и убедимся, что возможен ещё только один случай, аналогичный показанному на рисунке 1, *в*.

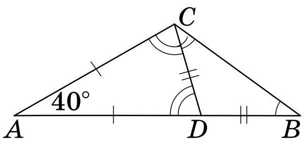


Рис. 2,*д*

6) $\angle B = \frac{40°}{3}$, $\angle C = \frac{380°}{3}$ (рис. 2, *е*).

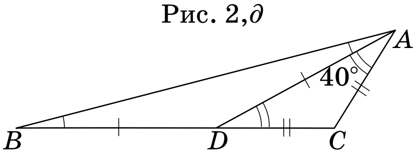
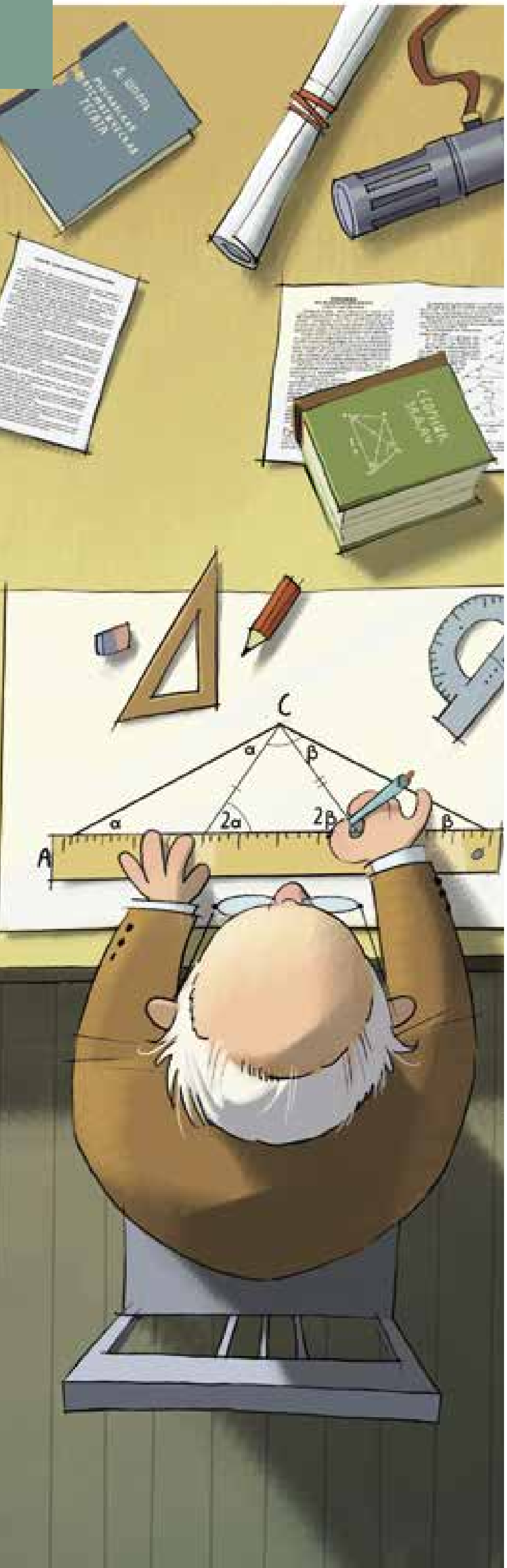


Рис. 2, *е*

Ответ*:* 90° и 50°; 60° и 80°; 120° и 20°; 105° и 35°, $\frac{40°}{3}$ и $\frac{380°}{3}$.

Задача 2 (А. Блинков, Д. Шноль, XV турнир математических боёв имени А. П. Савина, 7 кл.). *Треугольник ABC можно разрезать на два равнобедренных треугольника двумя способами, проводя прямые через вершину С. Найдите углы треугольника ABC.*



Решение. Опять обратимся к нашему исследованию. Заметим, что если к разрезу на рисунке 1, *а* добавить второй разрез, соответствующий рисунку 1, *б* или 1, *в*, получится треугольник с углами 90°, 60° и 30°. Для него все три способа разрезания совпадают.

Попробуем добавить второй разрез CE к случаю на рисунке 1, *б*, учитывая, что $\beta = 2\alpha$. Так как угол AEC – внешний для треугольника BEC, то $\angle AEC > \angle BEC = 2\alpha > \angle EAC = \alpha$. Следовательно, AE не может оказаться основанием равнобедренного треугольника ACE. Сторона AC также не может быть основанием этого треугольника, так как $\angle ACE \neq \angle ACD = \angle CAE$. Значит, $AC = AE$. Тогда угол AEC острый, поэтому основанием равнобедренного треугольника BEC является BC (рис. 3, *а*).

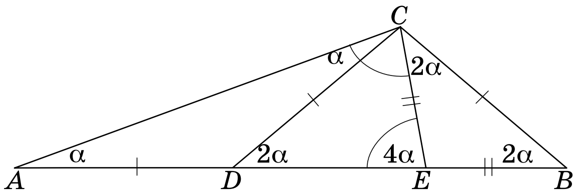


Рис. 3, *а*

В этом случае $\angle ACE = \angle AEC = 4\alpha$. Тогда значение α можно найти, например, по сумме углов треугольника ACE: $\alpha + 4\alpha + 4\alpha = 180°$; $\alpha = 20°$. Значит, углы исходного треугольника: 20°, 40° и 120°.

Второй разрез можно добавить и на рисунке 1, *в* (рис. 3, *б*). Тогда, учитывая, что $\angle BCD = \angle BDC = 2\alpha$ и $\angle ACE = \angle AEC = 2\beta$, получим: $\angle ACB = 3\alpha = 3\beta$, то есть $\alpha = \beta$. Значит, треугольник ABC – равнобедренный, $\alpha + \alpha + 3\alpha = 180°$; $\alpha = 36°$. В этом случае углы исходного треугольника: 36°, 36° и 108°.

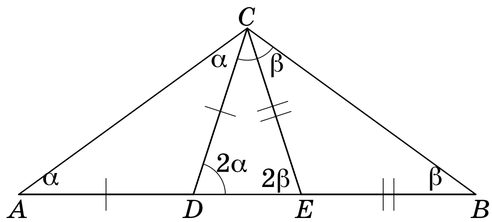


Рис. 3, *б*

Ответ*:* 20°, 40° и 120° или 36°, 36° и 108°.

Заметим, что в равнобедренном треугольнике ABC каждая из прямых CD и CE разбила угол ACB в отношении 2:1. Это не случайно (см. ниже задачу 3).

Посмотрим теперь на аналогичные разбиения выпуклых четырёхугольников. Пусть каждая из двух прямых разбивает выпуклый четырёхугольник $ABCD$ на два равнобедренных треугольника. Понятно, что такие прямые должны содержать диагонали этого четырёхугольника.

При таких разбиениях образуются четыре равнобедренных треугольника: ABC, ADC, BAD и BCD (рис. 4, *а*–*в*). В каждом из них либо равны две стороны исходного четырёхугольника, либо сторона равна диагонали. Поскольку сумма углов четырёхугольника равна 360°, хотя бы один из его углов – не острый. Следовательно, хотя бы в одном из равнобедренных треугольников, полученных при разбиении, диагональ будет основанием. Пусть это треугольник ABC, в котором $AB=BC$. Тогда для треугольника ADC возможны два случая: 1) $AD=DC$ (рис. 4, *а*, *б*); 2) $AD=AC$ (рис. 4, *в*). В каждом из этих случаев посмотрим, что может произойти при разбиении $ABCD$ диагональю BD.

1) Такой четырёхугольник называется **дельтоидом**, он симметричен относительно диагонали BD, и возможны, в свою очередь, два варианта:

а) $AB=AD$; $CB=CD$ (рис. 4, *а*). Тогда ***ABCD* – ромб.**

б) ***ABCD* – дельтоид**, в котором $\boldsymbol{AD=BD=CD}$ (рис. 4, *б*).

2) $BC=CD$; $AD=BD$ (рис. 4, *в*). Докажем, что ***ABCD* – равнобокая трапеция, в которой боковая сторона равна меньшему основанию** (*почему меньшему, а не большему?*). Так как $\angle ABC \geqslant 90°$, равны треугольники ABD и DCA (по трём сторонам), а значит, равны их соответствующие высоты, проведённые из вершин B и C, откуда $BC \parallel AD$.

Можно найти углы этой трапеции, так как её диагонали – биссектрисы углов при большем основании. Отметив равные углы, из треугольника ACD получим: $\alpha+2\alpha+2\alpha=180°$; $\alpha=36°$.

Таким образом, углы трапеции $ABCD$: **72°** и **108°**.

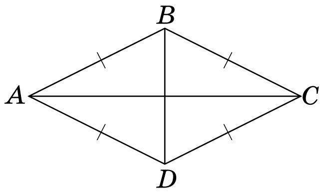


Рис. 4, *а*

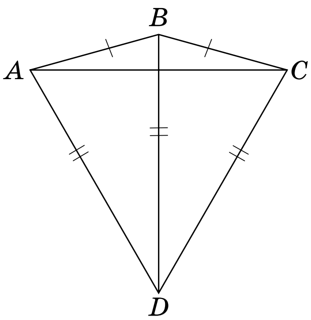


Рис. 4, *б*

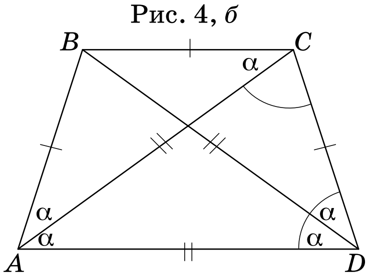
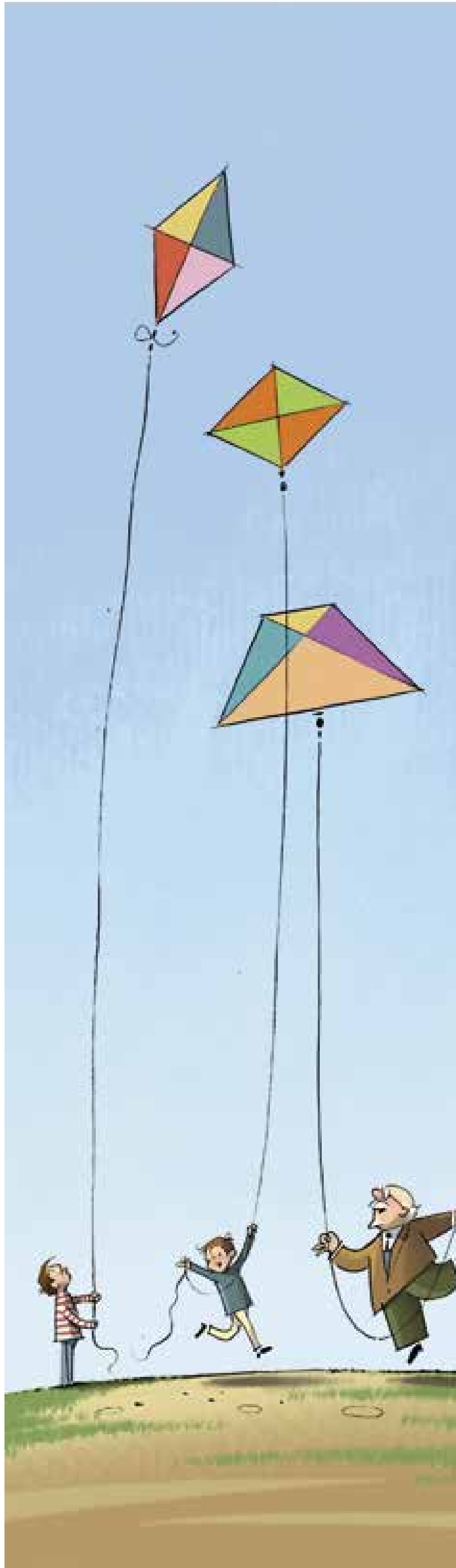
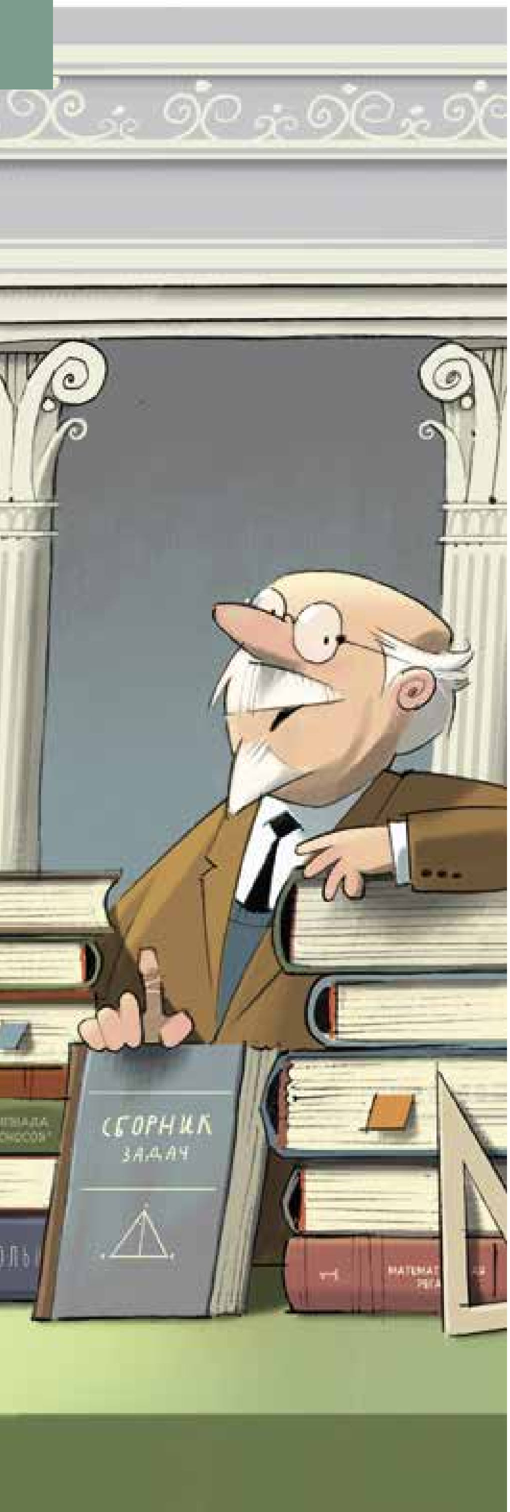


Рис. 4, *в*





Художник Алексей Вайнер

ЗАДАЧИ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ

1 (Д. Шноль, Московская математическая регата 2008/09, 7 кл.). Два угла треугольника равны 100° и 60°. Как его разрезать на два равнобедренных треугольника?

2 (Д. Шноль, Московская математическая регата 2015/16, 7 кл.). Про треугольник, один из углов которого равен 120°, известно, что его можно разрезать на два равнобедренных треугольника. Чему могут быть равны два других угла исходного треугольника?

3 (А. Заславский, XXIII турнир математических боёв имени А. П. Савина, 7 кл.). Прямая разрезает равнобедренный треугольник на два равнобедренных треугольника. В каком отношении эта прямая может разделить угол треугольника?

4 (А. Блинков, XXIII турнир математических боёв имени А. П. Савина, 7 кл.). Биссектриса BD треугольника ABC отсекает от него равнобедренный треугольник BCD, а биссектриса CE отсекает от ABC тупоугольный равнобедренный треугольник ACE. Найдите углы треугольника ABC.

5 (Олимпиада «Ломоносов»). В равнобедренном треугольнике ABC каждый из углов содержит нецелое число градусов. Известно, что через одну из вершин этого треугольника можно провести прямолинейный разрез, разбивающий его на два равнобедренных треугольника. Найдите углы треугольника ABC.

6 (А. Блинков, Московская математическая регата 2016/17, 9 кл.). Верно ли, что любой треугольник можно разбить на четыре равнобедренных треугольника?

7 (Д. Шноль). На сторонах AC и BC треугольника ABC отмечены точки M и K соответственно. Может ли оказаться так, что треугольники ABM, BMK и MKC – равнобедренные и имеют равные площади?

8 (М. Прасолов, А. Перепечко). Каждая из трёх прямых делит четырёхугольник на два равнобедренных треугольника. Найдите углы этого четырёхугольника.

9 (А. Блинков, Московская математическая регата 2008/09, 8 кл.). Диагональ четырёхугольника делит его на два равнобедренных прямоугольных треугольника. Найдите все возможные значения углов этого четырёхугольника.

10 (А. Блинков, Ю. Блинков, Московская математическая регата 2010/11, 8 кл.). Диагональ трапеции делит её на два прямоугольных равнобедренных треугольника. Сравните длину этой диагонали и длину средней линии трапеции.

11 (Фольклор). Две стороны четырёхугольника равны 1 и 4. Одна из диагоналей равна 2 и делит его на два равнобедренных треугольника. Найдите периметр четырёхугольника.

Избранные задачи Нижегородской (XV открытой) математической олимпиады

Материал подготовил
Дмитрий Кузнецов

7 класс

1. На какой наименьшей квадратной доске можно расставить ферзя, короля, слона, коня и ладью так, чтобы ни одна из фигур не била никакую другую?

2. В 15-литровые вёдра налито соответственно 1, 2, 3, 4 и 5 литров воды. Разрешается перелить в любое ведро из любого другого столько воды, сколько в нём уже есть. Какое наибольшее количество воды можно собрать в одном ведре?

3. Сначала Вова ставит на нижней горизонтали шахматной доски слона, затем Петя и Вова по очереди (начинает Петя) двигают слона за один ход на любое количество клеток по диагонали вверх-влево или вверх-вправо. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Укажите все начальные положения слона, чтобы при правильной игре выиграл Вова.

4. Найдите наибольшее целое число N, не превосходящее 2017 и обладающее таким свойством: существует целое число A, которое делится на все целые числа от 1 до N, кроме каких-то двух последовательных.

8 класс

1. В треугольнике ABC на стороне AC выбрана такая точка D, что медиана AM треугольника ABD параллельна медиане DN треугольника DBC. Найдите $\frac{AD}{DC}$.

2. Найдите $a+b$, если про действительные числа a и b известно, что $|a-1|=|b|$ и $|b-1|=|a|$.

3. В выпуклом четырёхугольнике $MNKL$ диагонали пересекаются в точке P, при этом $MN=NK=KL$ и $\angle NPK=120°$. Докажите, что $MP=PL$.

4. Петя закрасил все клетки, примыкающие к краю изначально белой доски 10×10, в чёрный цвет. Может ли Вася закрасить в чёрный цвет часть клеток внутреннего белого квадрата 8×8 так, чтобы нигде на доске не нашлось одноцветного квадрата 2×2 и квадрата 2×2, клетки которого окрашены в шахматном порядке?

Олимпиада проводится совместно с НИУ «Высшая школа экономики» для 7 – 11 классов. Задачи 7.2, 7.4 и 8.2 составлены по материалам Уральских турниров, задача 8.4 – по задаче Всероссийской олимпиады. Авторы остальных задач: Д. Ю. Кузнецов и Михаил Кузнецов.

Художник Сергей Чуб

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Михаил Гельфанд

МОНЕТЫ
И РУССКАЯ ЛИТЕРАТУРА

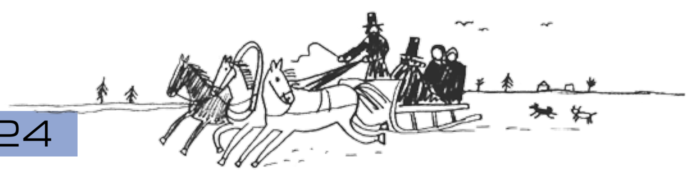
В поэме Некрасова «Кому на Руси жить хорошо» есть такое место:

По времени приладились
И к новому писцу.
Тот ни строки без трёшника,
Ни слова без семишника.

Ясно, что речь идёт о деньгах. Но о каких? В советские времена словом «трёшник» называли банкноту в три рубля, но для середины XIX века это слишком большая сумма. Может быть, это три копейки? Но тогда семишник – это семь копеек, а такой монеты никогда не существовало (чеканились монеты в 1/4, 1/2, 1, 2, 3, 5, 10, 15, 20, 25, 50 копеек и далее монеты рублёвых номиналов). Добавляет непонятности надпись на медной монете: «3 копейки серебром».

Это не трёшник!

Дело в том, что в XIX веке стоимость бумажных денег (ассигнаций) и металлических денег (в том числе и медных, но со счётом, основанным на серебре) была разной. Курс ассигнаций относительно серебра колебался. Чтобы прикинуть, каким он мог быть в середине XIX века, приведём ещё две цитаты. Вот разговор между старухой-трактирщицей, Ноздрёвым и его зятем в «Мёртвых душах» Гоголя:



– За водочку, барин, не заплатили... – сказала старуха.

– А, хорошо, хорошо, матушка. Послушай, зятёк! заплати, пожалуйста. У меня нет ни копейки в кармане.

– Сколько тебе? – сказал зятёк.

– Да что, батюшка, двугривенник всего, – сказала старуха.

– Врёшь, врёшь. Дай ей полтину, предовольно с неё.

– Маловато, барин, – сказала старуха, однако ж взяла деньги с благодарностию и ещё побежала впопыхах отворять им дверь. Она была не в убытке, потому что запросила вчетверо против того, что стоила водка.

(Поясним: двугривенный – 20 копеек, полтина – 50 копеек).

А вот цитата из «Горячего сердца» Островского:

ХЛЫНОВ. Не страшно мне, господин полковник, не пугайте вы меня! Право, не пугайте лучше! Так уж вы лучше со мной не судитесь, потому я сейчас вас обремизить могу; а лучше положите с меня штраф, за всякое моё безобразие, сто рублей серебра.

...

*ХЛЫНОВ. (*Вынимает бумажник.*) Позвольте вам! (Подаёт три сторублёвые ассигнации.) Сочтите так, что за штраф!*

Теперь попробуйте сказать, **какую монету называли «трёшник», а какую «семишник» и каков примерно был курс ассигнаций.**

Художник Артём Костюкевич

Сломанная веточка и другие симметриксы

Владимир Красноухов

Мы уже давали нашим читателям так называемые *симметриксы* – головоломки, где необходимо из заданных элементов собрать симметричную фигуру[1].

В этих задачах силуэт собираемой фигуры, естественно, заранее не задан (его надо определить), и даже вид симметрии, как правило, не указывается.

Казалось бы, такая широкая постановка задачи предоставляет и широкие возможности её решения. Но не так всё просто. Такие головоломки гораздо труднее «силуэтных» и требуют перехода на более высокую творческую ступень. Смастерить их легче, чем решить.

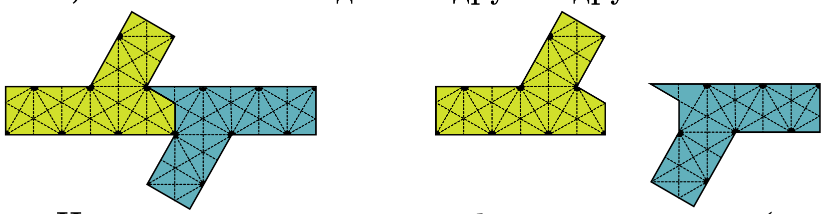
Наш опыт показывает, что задачи-головоломки «на симметрию» достаточно сложны для многих независимо от их возраста и образования. Затраченное время на решение при вызывающей простоте задачи бывает удивительно велико.

Зачастую решающий задачу, даже если он при переборе случайно набрёл на правильный ответ, не видит его и продолжает перебор вариантов.

Поучимся видеть симметрию и получим удовольствие от успешно решённых творческих задач.

Сломанная веточка

Элементы в этой задаче, как и во всех последующих, можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга.



Изготовьте симметричную фигуру по рисунку (слева), разрежьте её на две части, как на рисунке справа.

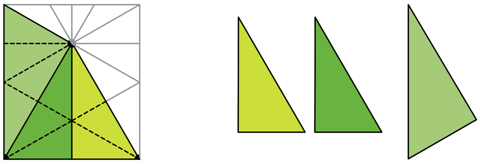
Задача. *Из полученных частей сложите другую симметричную фигуру.*

Казалось бы, всего две части (меньше не бывает!), тем не менее, решение задачи не очевидно.

[1] «Чичен-Ица, Эйяфьядлайёкюдль и другие головоломки на складывание симметричных фигур» («Квантик» №1, 2013), «Бинди и три сосиски» («Квантик» №1, 2015), «Симметричные созвездия, или Symm-Aster Puzzle» («Квантик» №6, 2016)

Три треугольника

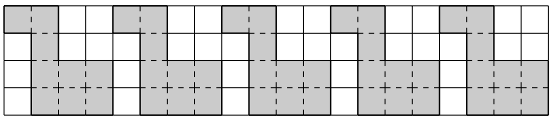
Изготовьте три прямоугольных треугольника по приведённому рисунку.



Задача. *Из этих треугольников сложите симметричную фигуру, затем переместите один из треугольников так, чтобы получилась другая симметричная фигура.*

Пять утят

Головоломка состоит из пяти одинаковых фигурок, напоминающих уточек. Каждая фигурка составлена из девяти квадратиков, поэтому такие фигурки называются *нонамино*.



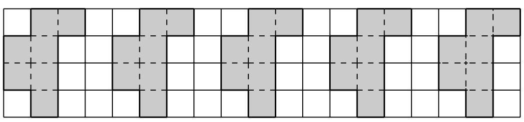
Используя 2 фигурки из этого набора, можно составить 28 различных симметричных фигур (в том числе 4 зеркально симметричные фигуры и 24 фигуры с центральной симметрией). Если использовать 4 фигурки, то количество возможных симметричных фигур составит уже более трёх тысяч.

Задача. *Составьте симметричную фигуру, используя все 5 фигурок. Нам известно единственное решение.*

Интересно, что если бы количество элементов в этой головоломке было не 5, а 6, задача решалась бы легко и имела много ответов. Подумайте, почему.

Пять пингвинов

Как и в предыдущей задаче, изготовьте 5 фигурок по следующему рисунку. Каждая фигурка состоит из 7 квадратиков (такие фигурки носят название *гептамино*).



Задача. *Составьте симметричную фигуру, используя все 5 фигурок. Известно единственное решение.*

Желаем успехов!

Художник Евгений Паненко

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 1, 2018)

21. *Читая книгу Мартина Гарднера, Настя заметила, что её папе в n^2 году исполнится n лет. Сколько лет исполняется отцу в 2018 году?*

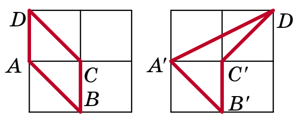
Ответ: 38. По условию, Настин папа родился в году с номером $n^2 - n$. Ближайшие к 2018 варианты: $44^2 - 44 = 1892$, $45^2 - 45 = 1980$, $46^2 - 46 = 2070$. Ясно, что $n = 45$ подходит, и в 2018 году папе будет 38 лет. Убедимся, что этот вариант единственный. Если $n = 44$ или меньше, то год, в котором папе исполнится n лет – 1936 или более ранний, и он ещё не наступил, когда Настя читает книгу. Но первая книга Гарднера вышла позже, в 1952 году. Если же $n = 46$ или больше, то в 2018 году Настин папа ещё не родился.

22. *Марсианская роза каждую ночь меняет свою высоту. Если высота была не больше метра, то она удваивается, иначе – уменьшается на метр. Спутник пролетает над розой каждый третий день. Может ли он каждый раз видеть розу одной и той же высоты?*

Ответ: может. Пусть высота розы $\frac{1}{3}$ м. За три ночи высота дважды удвоится, а затем уменьшится на метр и станет снова равна $\left(\frac{1}{3} \cdot 2 \cdot 2\right) - 1 = \frac{1}{3}$ м, так что спутник будет всегда видеть одно и то же.

23. *Петя придумал признак равенства четырёхугольников. Он утверждает, что если даны четырёхугольники $ABCD$ и $A'B'C'D'$ (не обязательно выпуклые), причём три стороны одного соответственно равны трём сторонам другого ($AB = A'B'$, $BC = B'C'$, $CD = C'D'$) и диагонали одного соответственно равны диагоналям другого ($AC = A'C'$, $BD = B'D'$), то и сами четырёхугольники равны. Не ошибается ли Петя?*

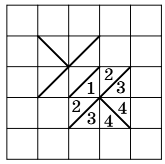
Ответ: ошибается Пример см. на рисунке.



24. *Квадрат 5×5 разбили на единичные квадратики и в каждом из них одним из двух возможных способов провели диагональ. Получилось какое-то разбиение исходного квадрата на 50 маленьких треугольников. Всегда ли удастся окрасить 25 треугольников в чёрный цвет так, чтобы чёрные треугольники не имели общих сторон?*

Ответ: не всегда. Пусть удалось покрасить так 25 треугольников. Каждый квадратик содержит не больше одного чёрного треугольника – ведь эти треугольники касаются, – то есть, чёрных треугольников не больше 25. А чтобы их было ровно 25, нужно в каждом квадратике окрасить чёрным ровно один треугольник.

Проведём 7 диагоналей, как показано на рисунке, а остальные – как угодно. Один из двух треугольников в центре будет чёрным, и так как рисунок симметричен, можно считать, что это треугольник 1. Тогда треугольники, отмеченные цифрой 2 – белые (как соседние с 1), а цифрой 3 – чёрные (в одном квадратике с белым). Тогда оба треугольника 4 белые, что невозможно.



25. *В куче 131 камень. Двое берут камни по очереди. Сначала первый игрок берёт k камней, где k – некоторое фиксированное число. Каждым следующим ходом игрок берёт либо столько же камней, сколько брал его соперник на предыдущем ходу, либо на один больше. Кто не может сделать ход – проиграл. Кто из игроков может гарантировать себе победу, как бы ни играл его соперник, если а) $k = 9$; б) $k = 1$?*

Ответ: а) первый; б) первый.

а) Для победы первому игроку нужно сначала взять 9 камней, а затем 10, 11, 12, 13 и 14. Это всегда возможно: если противник взял столько же камней, сколько первый, то нужно взять на один больше, а если противник взял на один больше – то столько же, сколько противник. Всего после своего шестого хода у первого игрока будет $9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 69$ камней. Сколько камней будет к этому моменту у второго игрока? Минимум $9 + 10 + 11 + 12 + 13 = 55$, когда он всегда берёт столько же, сколько первый. Максимум $10 + 11 + 12 + 13 + 14 = 60$, когда он всегда берёт на 1 камень больше. Суммарно игроки возьмут от 124 до 129 камней, для следующего хода второго останется от 2 до 7 камней, и второй игрок не может сделать ход.

б) Первый выигрывает по той же стратегии: берёт 1, 2, ..., 11 камней. Всего он заберёт 66 камней, а второй игрок к этому моменту – от 55 до 65. Суммарно они возьмут от 121 до 131 камня, останется не больше 10 камней, и второй игрок не сможет сделать ход.

ГРУЗИНСКИЕ МОНЕТЫ
(«Квантик» № 2, 2018)

Почти все символы, которые мы видим на монетах (кроме & из первого вопроса на двойном абазе 1808 года), есть в алфавите. Видимо, номинал монеты и год чеканки обозначались буквами.

Видно два места, в которых буквы на разных монетах отличаются: одна буква в первой строчке и группа из трёх или четырёх букв в последней. При этом первая буква совпадает у монет одинакового достоинства, стало быть, это номинал:

ე – пули ი – полубисти რ – полуабаз
ს – абаз უ – двойной абаз

Пометим эти буквы в алфавите зелёным:

აბგდევზთიკლმნოპჟრსტუფქღყშჩცძწჭხჯჰ

Теперь выпишем годы подряд:

1804 – ჩყდ	1808 – ჩყჱ	1831 – ჩყლა
1805 – ჩყე	1810 – ჩყი	
1806 – ჩყვ	1815 – ჩყიე	

Сравним 1805, 1810 и 1815 годы: последние две буквы в 1815 (იე) – это последние буквы в 1810 (ი) и 1805 (ე). Ясно, что ი = 10, а ე = 5. Заметим, что последние буквы в 1804 (დ), 1805 (ე) и 1806 (ვ) идут в алфавите подряд, а алфавит начинается с буквы ა, которая встречается в 1831. Пометим буквы, встречающиеся в датах, красным:

აბგდევზთიკლმნოპჟრსტუფქღყშჩცძწჭხჯჰ

Теперь видно, как устроена запись чисел: первые 9 букв обозначают единицы, следующие – десятки, потом сотни и тысячи. Буква ჱ в 1808 должна обозначать «8 единиц», **единственное место, куда её можно поместить – это между ზ (7) и თ (9). Мы ответили на первый вопрос.**

Теперь вернёмся к номиналам. Мы видим, что пули = 5, а полубисти = 10. Стало быть, **в одном бисти (=20) четыре пули.**

Дальше надо считать: оказывается, между ლ = 30 и ყ = 800 не хватает ещё одной буквы. В зависимости от расположения недостающей буквы, полуабаз равен 90 или 100, а абаз – 100 или 200. Но абаз вдвое больше полуабаза, так что полуабаз равен 100, абаз – 200, двойной абаз – 400. Ясно, что второй вариант правильный. Итак, в **абазе десять бисти, и мы ответили на второй вопрос.**

Ответ на третий вопрос – это просто проверка того, что мы уже знаем.

Полуабаз 1807 года –

რ ქართული თეთრი ჩყზ

Двойной абаз 1819 года –

უ ქართული თეთრი ჩყით

Абаз 1923 года – ს ქართული თეთრი ჩშკგ

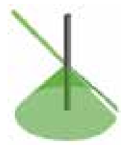
Теперь остался последний, **четвёртый вопрос**. Сравнение абаза 1804 года с монетами из условия, двумя абазами и полуабазом 1804 года, показывает, что резчик ошибся в номинале: კ (20) вместо ს (200). Аналогично, сравнение бисти 1806 года с пули 1806 года и с нашей таблицей номиналов показывает, что с датой всё в порядке, а вот в номинале опять ошибка: должно быть კ (20), а вырезано ვ (6). Видимо, в этом случае резчика подвело внешнее сходство букв.

Замечания. Ошибка с абазом случилась на первом году чеканки и сразу была исправлена: такая монета очень редкая. А вот ошибку в бисти исправлять так и не стали, и она присутствует во всех бисти (которые чеканили до 1810 года). Дело в том, что, хотя монеты чеканились в Тбилиси, резчики были русские и, видимо, не сразу разобрались с записью чисел в грузинском алфавите. Хотя могли бы: ровно такая же система применялась в России до Петра I и используется до сих пор в церковнославянском языке.

А ещё одна упомянутая исчезнувшая буква (ჲ) обозначала 60, но этого из условия задачи установить было нельзя – только то, что она располагалась где-то между ლ (30) и რ (100).

СВЕТ НА ЗАНАВЕСКЕ («Квантик» № 2, 2018)

Солнечный свет отражается нитями занавески. Нить – это как бы длинный цилиндр. Солнечные лучи падают на него, образуя определённый угол с осью цилиндра, и отражаются под таким же углом, но расходятся во все стороны, образуя конус, как на рисунке (см., например, статью А. Щетникова «Световая окружность» в «Квантике» № 5, 2015).



В занавеске два семейства таких нитей, вертикальные и горизонтальные. От каждого семейства лучи отражаются под фиксированным углом, поэтому попавшие к нам в глаз лучи тоже образуют конус (только «перевёрнутый»). Пересечение конуса с занавеской выглядит как дуга (часть гиперболы); если ось конуса вертикальна, то дуга «горизонтальна», а если ось конуса горизонтальна, то дуга «вертикальна». Значит, мы должны видеть две дуги: одну – от вертикальных нитей (она идёт слева направо), и вторую – от горизонтальных (идёт сверху вниз).

Почему же «вертикальных» дуг две? Посмотрите на плетение на рисунке: горизонтальные нити то ныряют под вертикальные, то выныривают. Получается, что видимые участки горизонтальных нитей изогнуты и состоят как бы из двух частей – двух сторон «треугольника», то есть идут в двух разных направлениях.

То же верно и для вертикальных нитей, но в меньшей степени – они прямее, так как сильнее натянуты, весь вес на них держится, – и поэтому (а также из-за ракурса) раздвоение горизонтальных дуг почти незаметно на фото.

ДИСКИ НА КОЛЁСАХ («Квантик» № 2, 2018)

И спереди, и сзади на грузовой машине стоят одни и те же стандартные колёса, только спереди они одиночные, а сзади – сдвоенные.

Спереди колесо обычно крепят выпуклостью наружу: внутри выпуклости остаётся удобное место для деталей, помогающих управлять поворотом колеса и т.п. Но сзади пару колёс надо крепить к одному и тому же месту оси (например, чтобы крепление для внешнего колеса не мешало снимать внутреннее колесо), для чего колёса надо располагать выпуклостями друг к другу (соединяя с местом крепления), а вогнутой частью наружу.

НАДУТАЯ БУТЫЛКА

Положим открытую бутылку в морозильную камеру, воздух в бутылке остынет. Закроем её после охлаждения прямо внутри холодильника и вытащим наружу. Воздух в бутылке нагреется, его давление в том же объёме повысится. Ещё способ: положим бутылку на воду и накроем тазом. Опустим таз на глубину около метра, давление там больше. Закроем бутылку там и поднимем обратно. Этот метод посложнее, но подойдёт и для получения куда больших давлений.

БРАМС, КАРУЗО, ВЕНЯВСКИЙ

Выдумана история про Карузо. Он, конечно, вполне мог написать книгу воспоминаний, пародируя знаменитую книгу Даниэля Дефо «Робинзон Крузо», но никак не мог использовать очки для близорукости в качестве лупы, потому что линзы у них не собирающие, а рассеивающие.

РАЗОБЬЁМ НА РАВНОБЕДРЕННЫЕ ТРЕУГОЛЬНИКИ

Ответы и указания

1. См. рис. 1.

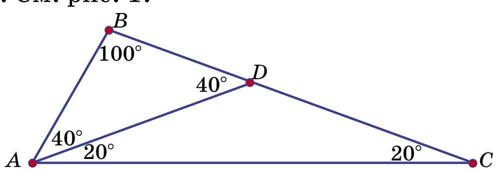


Рис. 1

2. Два случая: 40° и 20° или 45° и 15°.

3. Либо пополам, либо в отношении 2 : 1. Биссектриса может быть проведена либо к основанию, либо к боковой стороне (два случая). В каждом из них вычислите углы получившихся треугольников.

4. 36°, 72°, 72° или $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{360^\circ}{7}$, $\frac{720^\circ}{7}$. Требуется рассмотреть три случая, один из которых оказывается невозможным.

5. $\frac{180^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$, $\frac{540^\circ}{7}$. Разрез может проходить через вершину основания (два случая) или вершину, противолежащую основанию (ещё два случая). Во всех случаях, кроме одного, возникают противоречия.

6. Верно. Проведите высоту к большей стороне треугольника, после чего в каждом из прямоугольных треугольников проведите медиану к гипотенузе.

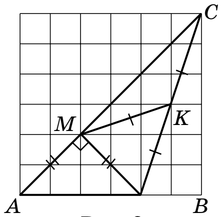


Рис. 2

7. Может, см. рис. 2.

8. 36°, 36°, 72°, 216° (см. рис. 3). Прямые должны содержать меньшие стороны четырёхугольника и внутреннюю диагональ.

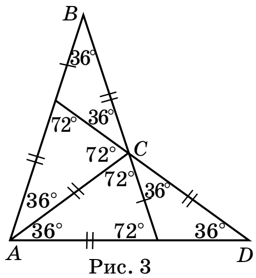


Рис. 3

9. Четыре угла по 90°, или два угла по 45° и два угла по 135°, или 45°, 135° и два угла по 90°.

10. Средняя линия больше диагонали. Проведя рассуждение, убедитесь, что единственный возможный случай – прямоугольная трапеция с острым углом 45°, в которой основания относятся как 2:1.

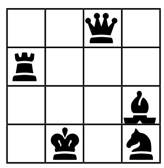
11. Периметр равен 11. Возможен единственный случай, так как в остальных случаях возникают противоречия с неравенством треугольника.

ИЗБРАННЫЕ ЗАДАЧИ НИЖЕГОРОДСКОЙ (XV ОТКРЫТОЙ) МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ОЛИМПИАДЫ

Идеи решений задач

7 класс

1. Ответ: на поле 4×4, см. рисунок.



Меньшее поле для 5 фигур могло быть только 3×3. Но после постановки ферзя останутся максимум 2 непобитые клетки, а остальных фигур 4.

2. Ответ: 14 л. При переливании объём воды в каждом ведре остаётся целым числом литров, а в ведре, в которое переливают, объём становится чётным. Поэтому наибольший объём будет чётным, и он не больше $1+2+$ $+3+4+5=15$, значит, максимум 14 л. Пример переливаний – см. таблицу, где на каждом шаге цветом указаны два участвующих в следующем переливании ведра.

1	2	3	4	5
1	4	1	4	5
1	8	1	0	5
2	7	1	0	5
2	7	2	0	4
4	7	0	0	4
8	7	0	0	0
1	14	0	0	0

3. Ответ: d1 и e1. Решим задачу для начальной позиции слона в любой клетке поля. Если начальная позиция выигрышная для Вовы, будем ставить в этой клетке плюс, иначе минус (см. рисунок).

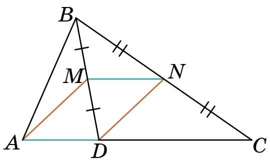
8	+	+	+	+	+	+	+	+
7	–	–	–	–	–	–	–	–
6	–	–	–	–	–	–	–	–
5	–	–	–	–	–	–	–	–
4	–	–	–	–	–	–	–	–
3	–	–	–	+	+	–	–	–
2	–	–	–	–	–	–	–	–
1	–	–	–	+	+	–	–	–
	a	b	c	d	e	f	g	h

Если слон стоит в верхней горизонтали, то Петя не может сходить и Вова выигрывает. Если Петя за один ход может перенести слона на верхнюю горизонталь, то такая клетка проигрышная для Вовы, поставим в неё минус. Тогда из клеток d3 и e3 можно сходить только в клетки с минусом, и если этот ход сделает Петя, то потом Вова передвинет слона на верхнюю горизонталь и выиграет; поставим в d3 и e3 плюс. Из клеток b1, c1, c2, d2, e2, f2, f1, g1 Петя может переставить слона в клетки d3 и e3 и выиграть, как описано ранее, так что ставим там минус. Наконец, из клеток d1 и e1 можно перенести слона только на клетки с минусом, откуда d1 и e1 выигрышные для Вовы.

4. Ответ: 511. Одно из двух последовательных чисел, на которые не делится A, должно быть чётным, запишем его в виде $2^k \cdot p$, где p – нечётное число, $k \geqslant 1$. Если $p>1$, то 2^k и p – меньше $2^k \cdot p$ (хотя бы на 2), и, по условию, A делится на оба эти числа. Но тогда A делится и на их произведение $2^k \cdot p$ (так как 2^k и p взаимно просты). Противоречие, значит, $p=1$, то есть одно из двух наших последовательных чисел равно 2^k. Аналогично доказывается, что второе число – степень какого-то простого числа. Выясним, чему может равняться k. Так как $2^k \leqslant N$ и $N \leqslant 2017$, то $2^k \leqslant 1024=2^{10}$. Но соседние с 2^{10} числа $1023=3\cdot 341$ и $1025=25\cdot 41$ – не степени простого числа. Следующая возможная степень двойки – $512=2^9$. Но соседние с ней числа $511=7\cdot 73$ и $513=27\cdot 19$ тоже не подходят. А следующая степень двойки $256=2^8$ нам подходит, так как число 257 простое. Мы получили, что 2^k не больше 256 (а соседнее число не больше 257). Значит, A не делится на 256 или меньшую степень двойки, и тем более не делится на 512, откуда $N \leqslant 511$.

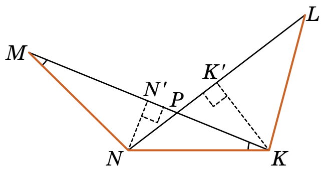
Но для $N=511$ нужное нам число A существует: перемножим 128 и все нечётные числа от 3 до 511, кроме 257. Проверьте, что A делится на все числа от 2 до 511, кроме 256 и 257.

8 класс



1. Ответ: 1 : 2. MN – средняя линия в треугольнике BDC, значит, отрезок MN параллелен отрезку DC и в 2 раза короче его. Тогда, в силу параллельностей $MN \parallel AD$ и $AM \parallel DN$, $AMND$ – параллелограмм, откуда $MN=AD$. Тогда $AD:DC=MN:2MN=1:2$.

2. Ответ: 1. Возведём оба равенства в квадрат ($a^2-2a+1=b^2$ и $b^2-2b+1=a^2$), сложим их, сократим равные слагаемые в обеих частях, разделим на 2 и получим, что $a+b=1$. Легко проверить, что любая пара таких чисел подходит.



3. Опустим перпендикуляры NN' и KK' на основания равнобедренных треугольников MNK и NKL. Тогда в прямоугольных треугольниках NPN' и KPK' (с $\angle NPN'=\angle KPK'=60°$) катеты PN' и PK' равны соответственно половинам гипотенуз NP и KP. Учитывая, что N' и K' – середины MK и NL соответственно, получаем, что $MP=MN'+N'P=$ $=KN'+N'P=KP+PN'+N'P=KP+2PN'=KP+$ $+PN$. Аналогично $PL=KP+PN$, то есть $MP=$ $=PL$, что и требовалось.

4. Ответ: не сможет. Пусть такая раскраска существует. Если две клетки разных цветов имеют общую сторону, то обведём её. Посмотрим на центр любого квадрата 2×2. Так как квадрат не одноцветный и не «шахматный», из его центра должны выходить ровно две обведённые стороны. Отсюда два следствия. Во-первых, обведённые стороны разбиваются на непересекающиеся циклы. Во-вторых, через каждый внутренний узел доски проходит один цикл. Раскрасим узлы доски в шахматном порядке. Тогда в каждом цикле чётное число узлов, так как узлы разных цветов в нём чередуются. С другой стороны, общее число узлов $9\cdot 9=81$ нечётно – противоречие.

наш КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем
заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач VII тура, с которыми справитесь, не позднее 1 апреля в систему проверки **konkurs.kvantik.com** (инструкция: goo.gl/HiaU6g), либо электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com**, либо обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».**

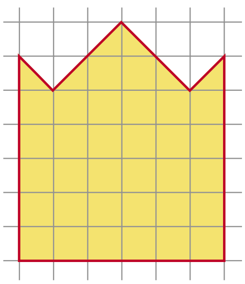
В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте **www.kvantik.com**. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы. Желаем успеха!

VII ТУР

31. Разрежьте фигурку на рисунке на 5 одинаковых частей.



32. Количество цифр в числе N в 2018 раз меньше, чем само число N. Чему может равняться N? (Найдите все возможные варианты и докажите, что других нет.)

Авторы: Егор Бакаев (31),
Григорий Гальперин (32), Сергей Костин (33),
Гриша Никитин (34), Игорь Акулич (35)

33. Два игрока по очереди нанизывают красные, синие и зелёные кольца на 33 стержня. У каждого игрока неограниченное количество колец каждого типа. За ход игрок нанизывает какое-либо кольцо на какой-то стержень. Запрещается помещать красное кольцо непосредственно на синее, а синее – непосредственно на зелёное. Также на стержне не может быть более одного кольца каждого цвета. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто из игроков может всегда выигрывать, как бы ни играл его соперник?

34. а) Петя пишет в каждой клетке доски 100×100 буквы *А* или *Б* так, чтобы всего на доске их было поровну. Вася передвигает по этой доске фишку, сдвигая её всё время только в соседнюю клетку и каждый раз записывая, на какой букве она стоит. Всегда ли Вася может так поставить фишку и так обойти ею все клетки ровно по одному разу, чтобы полученная последовательность букв одинаково читалась слева направо и справа налево?

б) То же самое для доски 101×101, букв *А* на одну больше, чем букв *Б*.

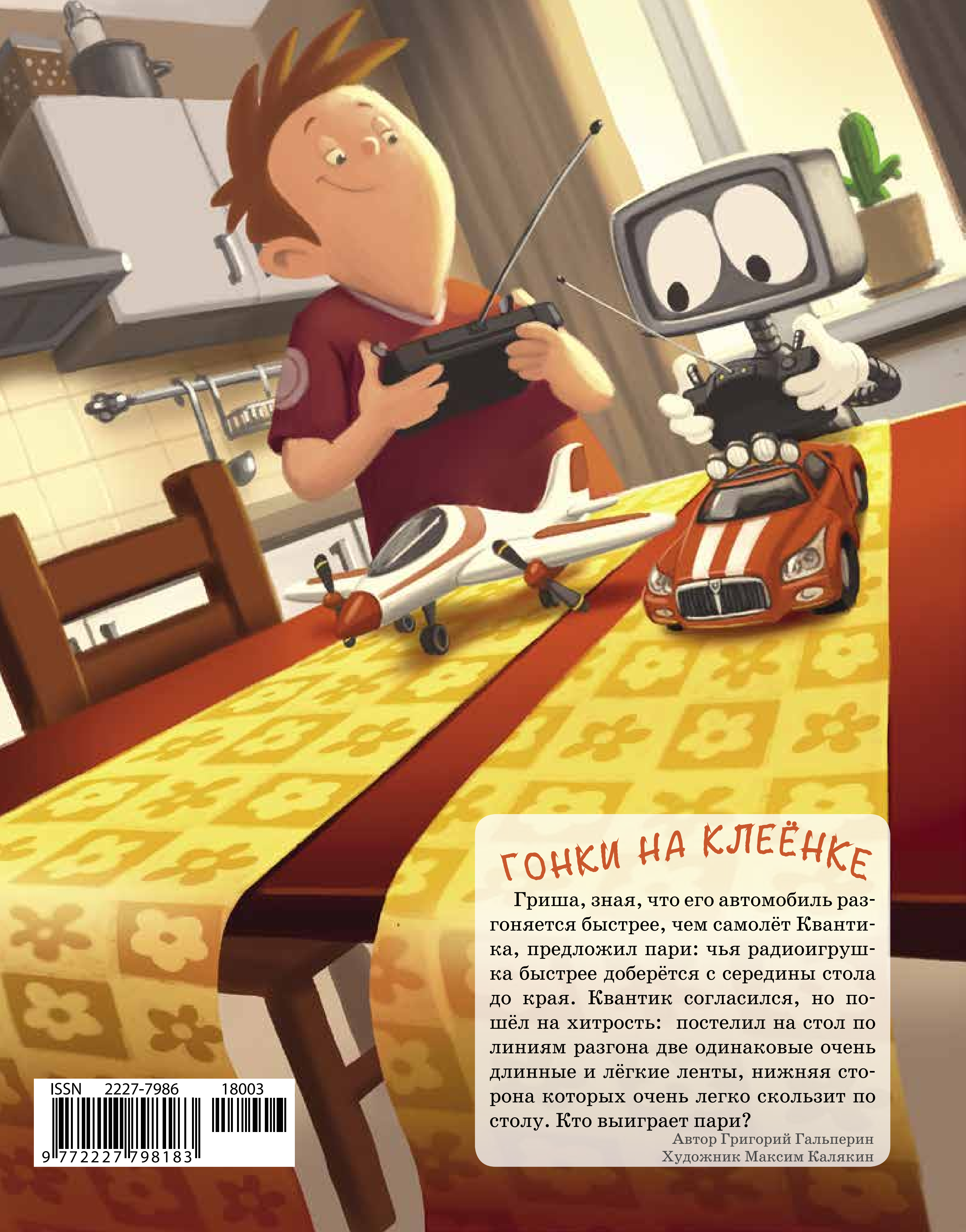
35. – Поделил я как-то одно натуральное число на другое с остатком, – рассказывал Петя Коле. – Когда же я поделил квадрат первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше, чем был при первом делении. А когда я поделил куб первого числа на второе, остаток стал уже втрое больше.

– Ну, это ты заливаешь, такого не может быть! – воскликнул Коля. – Вот со мной действительно была похожая история. Я тоже поделил одно натуральное число на другое с остатком. И когда я поделил куб первого числа на второе, остаток оказался вдвое больше первоначального, а когда поделил квадрат первого числа на второе, остаток стал втрое больше.

– Теперь уже ты сочиняешь! – заявил Петя.

Кто мог быть прав в каждом случае?

Художник Николай Крутиков



Гонки на клеёнке

Гриша, зная, что его автомобиль разгоняется быстрее, чем самолёт Кватика, предложил пари: чья радиоигрушка быстрее доберётся с середины стола до края. Квантик согласился, но пошёл на хитрость: постелил на стол по линиям разгона две одинаковые очень длинные и лёгкие ленты, нижняя сторона которых очень легко скользит по столу. Кто выиграет пари?

Автор Григорий Гальперин
Художник Максим Калякин

ISSN 2227-7986 18003
9 772227 798183