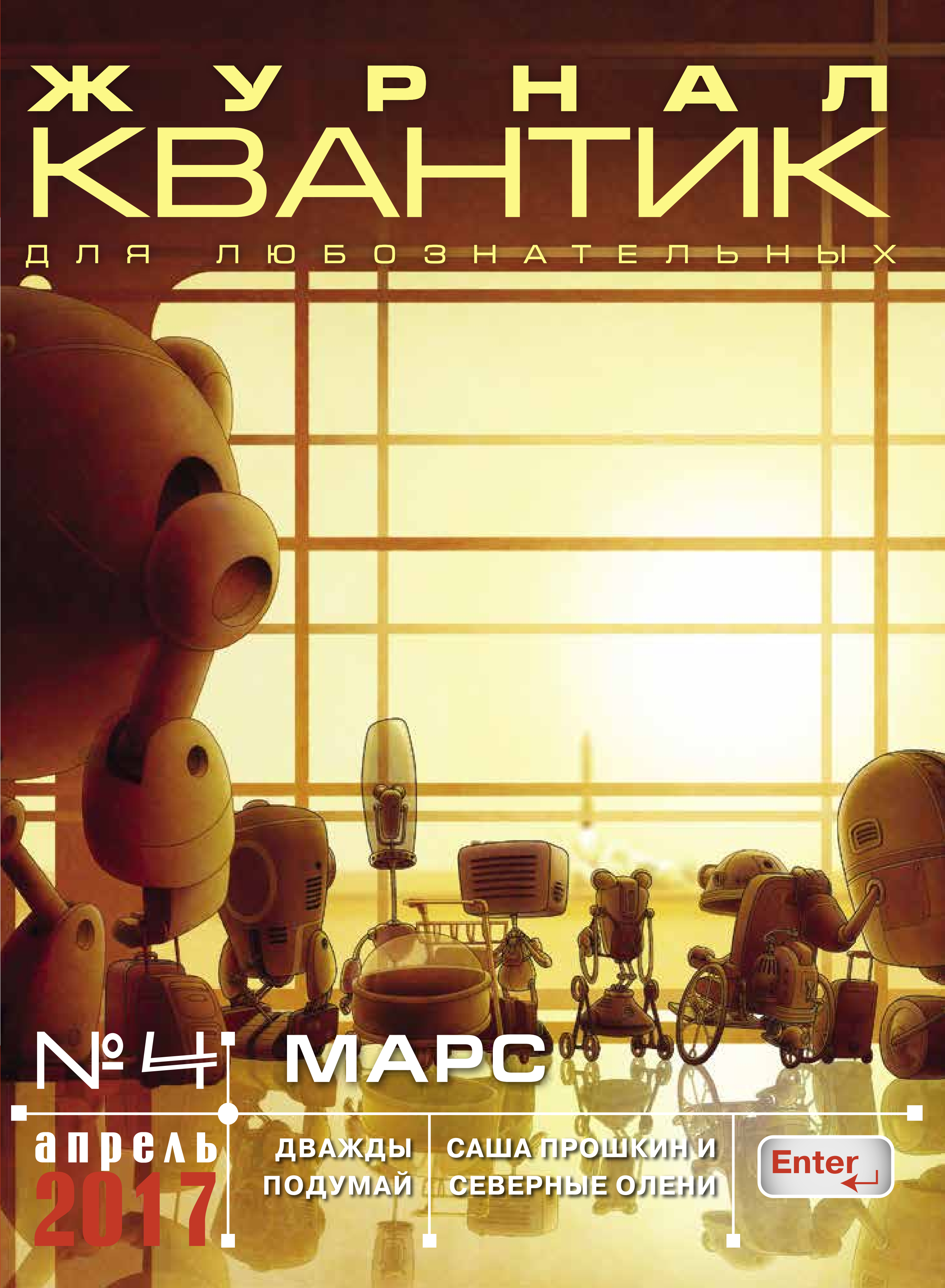


ЖУРНАЛ КВАНТИК

ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

№ 4

МАРС

апрель 2017

ДВАЖДЫ ПОДУМАЙ

САША ПРОШКИН И СЕВЕРНЫЕ ОЛЕНИ

Enter

№ 4 | апрель 2017

Издаётся Московским центром непрерывного математического образования

e-mail: kvantik@mccme.ru

ОТКРЫЛАСЬ

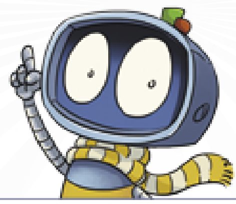
ПОДПИСКА НА II ПОЛУГОДИЕ 2017 ГОДА

Подписаться на журнал «КВАНТИК» вы можете
в любом отделении связи Почты России и через интернет

КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»

Самая низкая цена на журнал!

Индекс **84252**
для подписки на несколько месяцев или на полгода



ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП

По этому каталогу также можно подписаться на сайте **vipishi.ru**

Индекс **11346**
для подписки на несколько месяцев или на полгода

- Жители дальнего зарубежья могут подписаться на сайте **nasha-pressa.de**
- Подписка на электронную версию журнала по ссылке **pressa.ru/magazines/kvantik#**
- Подробнее обо всех способах подписки читайте на сайте **kvantik.com/podpiska.html**

Кроме журнала редакция «Квантика» выпускает альманахи, плакаты и календари загадок
Подробнее о продукции «Квантика» и как её купить, читайте на сайте kvantik.com
Теперь у «Квантика» есть свой интернет-магазин – **kvantik.ru**!

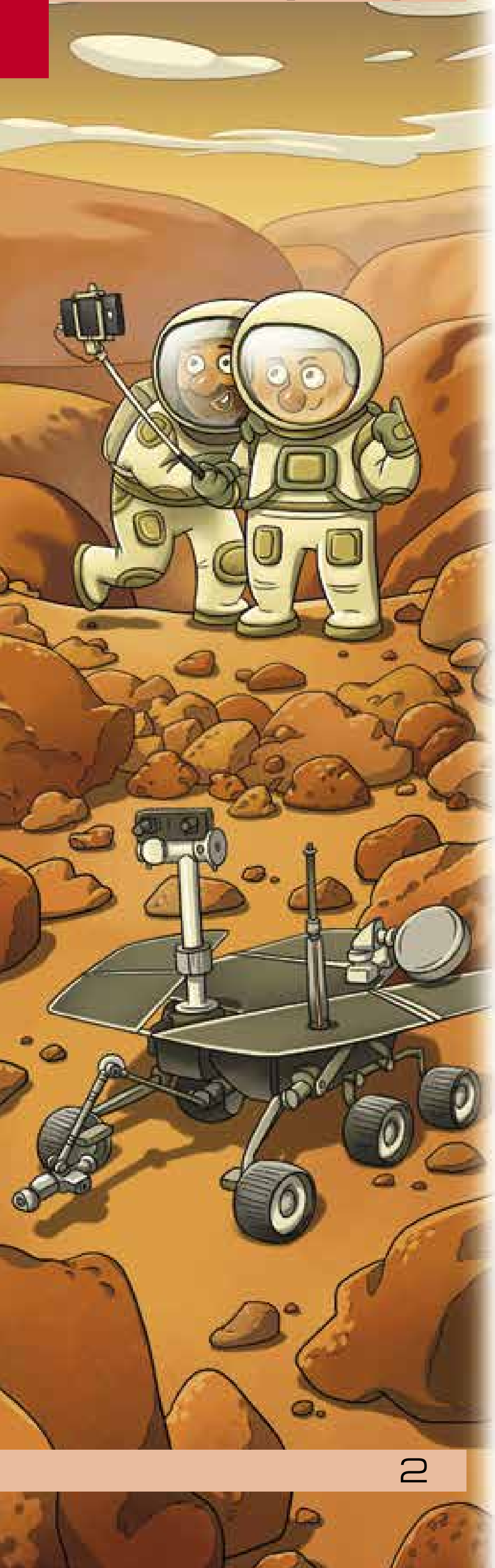
www.kvantik.com
kvantik@mccme.ru
instagram.com/kvantik12
kvantik12.livejournal.com
facebook.com/kvantik12
vk.com/kvantik12
twitter.com/kvantik_journal
ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 04, апрель 2017 г.
Издаётся с января 2012 года
Выходит 1 раз в месяц
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор).
Главный редактор: С. А. Дориченко
Редакция: В. Г. Асташкина, В. А. Дрёмов, Е. А. Котко, И. А. Маховая, А. Б. Меньщиков, А. Ю. Перепечко, М. В. Прасолов
Художественный редактор и главный художник: Yustas-07
Вёрстка: Р. К. Шагеева, И. Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas-07

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное учреждение «Московский Центр непрерывного математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва, Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 241-08-04, e-mail: kvantik@mccme.ru,
сайт: www.kvantik.com
Подписка на журнал в отделениях связи Почты России:
▪ Каталог «Газеты. Журналы» агентства «Роспечать» (индексы **84252** и **80478**)
▪ «Каталог Российской прессы» МАП (индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской прессы» на сайте **vipishi.ru**

По вопросам оптовых и розничных продаж обращаться по телефону **(495) 745-80-31** и e-mail: **biblio@mccme.ru**
Формат 84х108/16
Тираж: 6000 экз.
Подписано в печать: 16.03.2017
Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл., Калининский р-н, с/п Бурашевское, ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986
6+

СОДЕРЖАНИЕ



МАРС

Масса	1/10 массы Земли
Радиус	1/2 радиуса Земли
Расстояние до Солнца	1,5 а.е. (1 а.е. = 150 млн км)
Период обращения вокруг Солнца	1,9 земных лет
Период вращения вокруг оси	24 часа 37 минут
Спутники	Фобос и Деймос

Марс – последняя, самая удалённая от Солнца планета земной группы. То есть планета, имеющая, как и Земля, твёрдую поверхность. По которой, например, можно ходить или ездить[1]. Этим сейчас, кстати, занимаются два из четырёх доставленных туда в разное время марсоходов, управляемых с Земли по радио. Давайте прогуляемся и мы.

Марс вообще-то планетка маленькая: диаметр у него в 2 раза меньше, чем у Земли, а значит – площадь поверхности меньше в 4 раза (это примерно площадь всех земных материков). И лёгкая: притяжение на поверхности планеты слабее земного почти в 2,5 раза, и мы там весили бы почти в 2,5 раза меньше, чем на Земле. Благодаря этому на Марсе спокойно стоят такие высокие горы, какие на Земле «просели» бы под собственной тяжестью, раздавив и расплавив своё основание. Самая высокая гора – потухший вулкан Олимп – имеет высоту около 25 км, то есть раза в 3 выше нашего Эвереста. Это вторая по высоте гора в Солнечной системе; первая находится на астероиде Веста. А ещё на Марсе – самые глубокие на планетах Солнечной системы каньоны; самый большой – долина Маринер – по меньшей мере в 3 раза глубже любого из земных (его глубина 7–10 км), а по длине (4000 км) равен почти четверти марсианского экватора. Но, в отличие от большинства земных каньонов, марсианские образованы не реками, пробивающимися через скалы, а движениями тектонических плит. А ещё на Марсе самый большой метеоритный кратер. Вот сколько рекордов на одном Марсе!

[1]Почему такой поверхности нет у остальных планет и что у них вместо неё – расскажем в следующий раз.

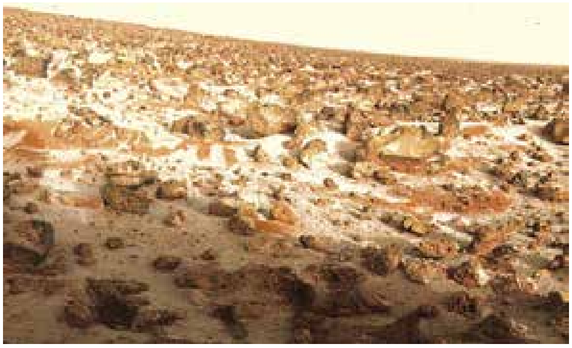
И длина суток, и наклон оси у Марса очень похожи на земные, хотя год в два раза длиннее. Поэтому с астрономической точки зрения смена времён года происходит практически так же, как на Земле. Есть только одно отличие: орбита Марса – довольно сильно вытянутый эллипс (не то что у Земли и тем более Венеры – у них почти точно круг). От этого в северном марсианском полушарии лето довольно холодное, зато длинное, потому что пока планета дальше от Солнца, она медленнее «ползёт» по своей орбите. А зима тёплая и длится недолго. В южном полушарии наоборот – климат контрастнее, и лето намного короче зимы. Температура на экваторе в полдень до +20 °C, на полюсе зимой – около −150 °C.

Грунт, то есть пыль и камешки, на Марсе практически такой же, как на Земле. Только ржавчины (оксида железа) почему-то больше. От этого Марс красноватый, даже с Земли это видно. (Не из-за этого ли его назвали в честь бога войны?) Пейзаж похож на какую-нибудь земную каменистую пустыню.

Атмосфера у Марса есть, но слабенькая, тоненькая... Давление «воздуха» у поверхности в 100 с лишним раз меньше, чем на Земле, а масса всей атмосферы – меньше земной в 200 раз.[2] Состоит она в основном из углекислого газа (CO_2). Это то самое вещество, которое мы выдыхаем, а растения «обратно» делают из него кислород. (Только на Марсе некому этим заняться...) А ещё – это то же вещество, что и «сухой лёд» в киосках у мороженщиков: оно, как и вода, может быть в твёрдом состоянии, а может в газообразном. А вот в жидком – не может! Для этого нужно было бы гораздо большее давление. Поэтому сухой лёд ни к чему не прилипает и не течёт: он сразу испаряется. И вот что замечательно: за холодную марсианскую зиму четверть или даже треть всей атмосферы замерзает и оседает в виде «сухого снега» вблизи полюса, так что полярная снежно-ледовая шапка увеличивается, а атмосферное давление очень сильно падает. Бывает, что и на низких широтах по утрам выпадает снег или иней – только не «водный», как у нас, а «углекислый». А весной, когда солнце начинает пригревать, полярные шапки стремительно

[2] Задача для старших: как, зная одно из этих чисел, найти другое?

испаряются, и массы нового «воздуха» устремляются от полюса к экватору. Получаются очень сильные ветры, которые поднимают в воздух тучи пыли. Так что когда в фантастических рассказах пишут про страшные пыльные бури на Марсе – это не выдумка, а настоящая марсианская «весенняя» погода.



Иней на Марсе. Снимок станции «Викинг»

Лет 140 назад итальянский астроном Скиапарелли, наблюдая Марс в телескоп, обнаружил на нём сеть тёмных линий, прямых или почти прямых. Он назвал их каналами (по-итальянски, впрочем, это слово может означать и ущелья...). В то время на Земле как раз достроили Суэцкий канал и начинали строить Панамский, и сразу появилось предположение, что это марсиане прорыли каналы, спасая свою планету от засухи. Тёмные линии интерпретировались как широкие полосы растительности по берегам. Началась настоящая «марсианская лихорадка», оптимисты уже строили планы контактов с инопланетянами. К сожалению, посланные к Марсу примерно сто лет спустя космические аппараты не подтвердили почти ничего из рисунков и предположений Скиапарелли. Некоторые из виденных им линий оказались горными хребтами, разломами или цепочками кратеров; остальные – просто оптической иллюзией. То есть там, где было только несколько размытых пятен, глаз видел прямые линии – наверно, потому, что очень хотелось их увидеть...

Но в одном Скиапарелли оказался прав – если не живые марсиане, то вода на Марсе действительно есть. А где есть вода – там может быть жизнь! Правда, пока нашли только лёд, «замурованный» в грунте и спрятанный в полярных шапках под слоем «сухого льда». Жидкой воды в таком виде, как у нас, на Марсе быть не может: из-за очень маленького атмосферного давления она бы там мгновенно закипела.[3] Зато, возможно, там есть «ужасно солёная» вода – есть такие особые соли, которые могут помешать воде испариться даже при марсианском очень низком давлении. Конечно, ни одно земное существо жить в такой ядовито-солёной воде не смогло бы, но мало ли...

У Марса есть луны, то есть естественные спутники, целых два! Но с нашей Луной они, конечно, не идут ни в какое сравнение. По сравнению с ней это просто два камешка: Фобос – размером 22 км, Деймос – 12 км. Они так малы, что площадь всей поверхности Фобоса примерно равна площади Москвы! Все «приличные» планеты и даже самые крупные астероиды имеют более-менее шарообразный вид – их силы притяжения хватило на то, чтобы разровнять поверхность: как мы уже говорили, гора намного выше Эвереста на Земле просела бы, а основание её расплавилось под тяжестью вершины и растеклось. Спутники Марса, как и мелкие астероиды, не смогли скруглить свою поверхность и так и остались «булыжниками» неправильной формы.

И Фобос, и Деймос имеют очень маленькую плотность: первый – меньше 2 г/см^3, второй – и вовсе 1,5 г/см^3. Это примерно как у кирпича и у сахара и в 2–3 раза меньше плотности Марса, не говоря уж о Земле. Из какого-то очень пористого камня сделаны эти спутники; похоже, что у них внутри куча дыр и пустот, занимающих не то четверть, не то даже половину объёма.

Ещё интересно, как они движутся. Фобос вертится очень близко к самому Марсу и очень быстро: полный оборот – за 7,5 часов. Сам Марс вокруг своей оси крутится медленнее. Из-за этого Фобос для марсианского наблюдателя движется не в ту сторону: встаёт на западе и садится на востоке! Да ещё и успевает взойти и сесть по 2 раза в сутки.

Задача. Нарисуйте картинку и разберитесь, почему так получается.

[3] Вы, может быть, слышали, что высоко в горах, на высоте 4–5 км, вода закипает не при 100 °C, а уже при 90 °C или даже 80 °C. Если подниматься ещё выше – температура кипения продолжает снижаться.

Поскольку на Марсе атмосферное давление такое, какое на Земле бывает на высоте примерно 40 км, температура закипания воды там равна 0 °C, так что лёд «закипает, не успев расплавиться».

А Деймос – в 2,5 раза дальше и вращается медленнее: 1 оборот за 30 часов, это дольше суток, но ненамного. Поэтому для марсианского наблюдателя он движется «нормально», как все, но очень медленно. От восхода до заката Деймоса проходит почти трое марсианских суток.


Фобос


Деймос

Марс своими приливами синхронизировал оба своих спутника, теперь они делают оборот вокруг оси за то же время, что и вокруг Марса, и повёрнуты к нему всё время одной стороной. Но что удивительно – действие приливных сил на этом не кончается. Деймос продолжает – совсем чуточку – тормозить вращение Марса, а Марс в отместку ускоряет движение Деймоса по орбите! Этот эффект очень слабенький, но из-за него Деймос очень медленно удаляется от Марса. (И наша Луна от Земли – тоже.) А с Фобосом всё ещё интереснее: оттого, что он вертится «слишком быстро», он не тормозит, а разгоняет вращение Марса вокруг оси. А Марс соответственно тормозит его движение по орбите. В итоге орбита Фобоса становится всё ниже и ниже – он приближается к Марсу на 2 метра за 100 лет. И совсем скоро по космическим меркам – через какие-нибудь 10 миллионов лет – Фобос окажется так близко к Марсу, что приливные силы разорвут его на куски...

На фотографиях видно, что Деймос гораздо более «гладкий», чем Фобос. По-видимому, это из-за большого количества пыли, которая «прячет» мелкие неровности. А Фобос зато гораздо темнее, и на нём много загадочных длинных полос – то ли трещин, то ли царапин... Почему спутники Марса так сильно отличаются друг от друга – пока непонятно. А вы как думаете?

Художник Мария Усеинова

Иван Кобиляков

Саша Прошкин и северные олени

Раньше Саша Прошкин вечером приходил домой, включал телевизор и смотрел его до позднего вечера. Но теперь, после знакомства с биологами из Заповедника, он всё больше времени стал проводить за чтением книг о природе.

Однажды Сашина бабушка загадала внуку такую загадку:

– Даже самый большой грамотей столько книжек и длинных статей на своём не напишет веку, сколько строк по весне на снегу. Что это?

Саша искал ответ в библиотеке, но так его и не нашёл. А бабуля не хотела говорить отгадку. Тогда мальчик собрал рюкзак и отправился в Заповедник. Похоже, именно там был ответ на непростой вопрос...

«Что это за строки на снегу? О чём была загадка?» – думал Саша Прошкин, как вдруг увидел перед собой что-то очень странное. Через долину реки, где ещё недавно следы животных встречались лишь изредка, теперь проходила широкая натоптанная тропа.

– И ты тут?! – услышал Саша знакомый голос биолога Михаила Зверева за спиной.

– И я тут, дядя Миша. Но я вас не вижу. Вы где?

– Я прячусь.

– От кого?

– От оленей, конечно! Они проходят как раз через то место, где ты стоишь. Осенью олени идут на юг, а весной – на север. Это называется *миграцией*.

– А для чего нужна миграция? – спросил Саша.

– Да иди же скорее сюда! – нетерпеливо буркнул Михаил. – Олени уже на подходе! Прячься, а то испугаешь их!

Оглянись вокруг

Саша послушно пошёл на голос и вскоре оказался вместе с Михаилом в укрытии из веток и снега.

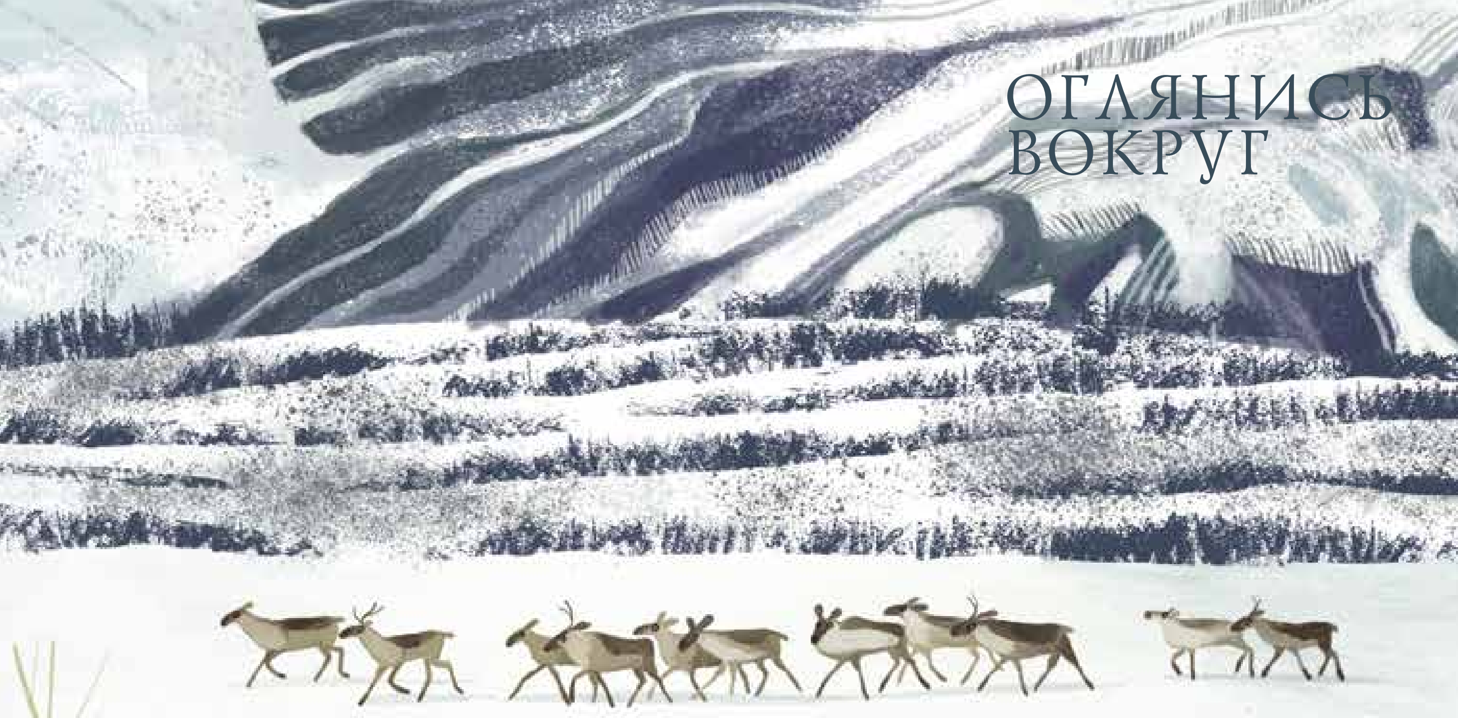
– Предки северных оленей жили в то же время, что и мамонты. Но мамонты вымерли, а олени научились мигрировать. Это до сих пор помогает им спасаться от голода, холода и от кровососущих насекомых, – шёпотом начал объяснять Михаил. – В год северные олени могут проходить до полутора тысяч километров! Весной они спешат попасть в тундру, в места, где родились. Там вдоволь корма, и ветер сдувает комаров. А осенью олени возвращаются в тайгу, где потеплее, а на снегу нет ледяной корки, которая мешает добывать еду.

Саша достал из рюкзака термос, и они с Михаилом сделали по глотку горячего чая.

– Благодаря шерсти из пустотелых волосков, северные олени могут выдерживать очень сильные морозы, – продолжал свой рассказ биолог. – Воздух внутри этих волосков плохо проводит тепло, поэтому потери тепла очень малы.

В это время на льду озера появилось оленье стадо. На бегу грациозные животные постоянно осматривались по сторонам – нет ли врагов? Саша затаился, а его опытный друг стал разглядывать приближающихся оленей в бинокль. Оказалось, что в стаде бежали только самки и годовалые оленята.

– Самки беременны и должны завершить весеннюю миграцию как можно скорее, пока не растаял лёд на реках, поэтому они начинают мигрировать намного раньше самцов, – пояснил Михаил. – Когда подойдёт срок рожать оленят, они уже доберутся до тундры. Самцам торопиться не надо. Они обычно завершают шествие.



– Как же самцы переплывают реки?

– Олени хорошо плавают,– улыбнулся Михаил, – преодолеть водную преграду для них не проблема. Труднее им приходится, когда на пути встаёт какой-нибудь трубопровод, построенный людьми. Его олени обойти не могут… К счастью, в заповедниках трубопроводы строить запрещено.

Саша посмотрел на следы, оставленные пробежавшими мимо животными, и сразу понял, о чём была бабушкина загадка! «Даже самый большой грамотей столько книжек и длинных статей на своём не напишет веку, сколько строк по весне на снегу». Строки на снегу – это следы северных оленей!

– Сколько же всего диких северных оленей в наших краях? – спросил изумлённый своей догадкой Саша.

– Через Заповедник и рядом с ним проходит крупнейшая в мире миграция. Ещё лет двадцать назад их было около миллиона!

– А что стало теперь?

– На них много охотятся. Сейчас число оленей уменьшилось больше чем в два раза… Если так пойдёт и дальше, диких оленей может совсем не остаться…

– Надо их защитить, – решительно сказал мальчик.

– Конечно, надо, – кивнул Михаил, – ледниковый период олени пережили, но против человеческой жадности могут и не устоять. К сожалению, за пределами Заповедника мы не можем защитить северных оленей. Там всё зависит от благоразумия охотников.

Художник Ольга Демидова
Фото автора

Игорь Акулич

Сто пятьдесят стрелок

– Поздравь меня, Даня, я нашёл ещё одну задачу[1]. Как ты думаешь, про что?

– Боюсь ошибиться, но ещё больше боюсь угадать. Неужели про стрелки часов?

– Именно! Вот послушай:

Сумасшедший конструктор создал часы со 150 стрелками. Первая стрелка крутится со скоростью один оборот в час, вторая делает 2 оборота в час, и т.д., 150-я стрелка делает 150 оборотов в час. Часы запустили из положения, когда все стрелки смотрели строго вверх. Когда в процессе работы часов встречаются две стрелки или более, эти стрелки немедленно отваливаются. Через какое время после запуска отвалится стрелка, вращающаяся со скоростью 74 оборота в час?

– Какая-то мрачная тенденция. Был у нас, помнится, чудак-часовщик[2], теперь – сумасшедший часовщик... Что же дальше будет? Маньяк-часовщик?

– Ты не увиливай. Не можешь решить – так и скажи!

– Почему же не могу? Могу, наверное. Только не сразу. Как представлю себе полторы сотни стрелок, и все друг на друга налетают и улетают, вернее сказать, отлетают... Жуть! Хотя... А ведь всё не так сложно, как кажется! Ведь раньше всего самая быстрая стрелка (150-я) догонит самую медленную (1-ю) – и обе отвалятся. Потом 149-я догонит 2-ю – и тоже отпадут. Ну, и так далее. А 74-ю стрелку догонит... какая же? Или, наоборот, она кого-то догонит? Подумать надо...

– А ты заметь, что сумма номеров двух сталкивающихся стрелок всегда постоянна и равна 151.

– Да, верно. Тогда с 74-й стрелкой встретится... 151 минус 74 ... 77-я! И когда же это случится? Если все скорости измерять в оборотах в час, то скорости стрелок равны их номерам, поэтому за время t (часов) они пройдут соответственно $74t$ и $77t$ оборотов. Но при этом более быстрая стрелка догонит медленную по кругу, то есть пройдёт на 1 оборот больше. Поэтому получаем:

$$77t - 74t = 1,$$

[1] «Квант» № 1, 2014 г., с. 35, автор задачи – К. Кохась.
[2] «Квантик» № 6, 2015 г., с. 2.

откуда $t=\frac{1}{3}$. Значит, 74-я стрелка отвалится через $\frac{1}{3}$ часа, или 20 минут.

– Верно. А через какое время наступит момент, когда отвалится последняя стрелка?

– Ну, это понятно – когда 76-я стрелка догонит 75-ю. Здесь получаем $76t-75t=1$, и $t=1$. Через час!

– И как тебе задачка?

– Интересная, конечно, но очень уж проста.

– Неудивительно – она и была предложена младшим школьникам. Но специально для тебя я её усложнил. Вот послушай. Сюжет тот же, но часовщик закрепил стрелки чуть посильней, так что теперь каждая из них после первого совпадения с другой стрелкой не отваливается, а отпадает только после второго совпадения.

– С той же самой стрелкой?

– Неважно, с какой. То есть первое столкновение стрелка выдерживает, а второе – уже нет. Сможешь ли ты «с ходу» ответить на те же два вопроса: когда отпадёт 74-я стрелка и когда часы останутся вообще без стрелок? А потом проверим.

– А что тут думать? Раз допустимое число столкновений возрастает вдвое, то и время, естественно, возрастает вдвое. Значит, ответы таковы: 40 минут и 2 часа.

– Хорошо, давай проверим. Только знаешь что, будем для удобства называть стрелку, которая ни с какой другой ещё не совпала, *сильной*, а которая уже разок с кем-то повстречалась, *слабой*. Тогда сильная стрелка, столкнувшись с любой другой, становится слабой, а слабая – погибает (в смысле, отлетает). Что мы тогда имеем? Сначала сталкиваются 150-я и 1-я стрелки, и обе становятся слабыми. Потом 150-я стрелка натыкается на 2-ю и отлетает, а 2-я становится слабой. Но одновременно с этим 149-я стрелка совпадает с 1-й...

– Почему это одновременно?

– Да ты же сам писал уравнения! Из них же сразу следует, что время совпадения стрелок обратно пропорционально разности номеров стрелок! И если разность номеров стрелок одна и та же, то и совпадут они одновременно!

– Согласен.

– Ну, и когда 149-я стрелка совпадает с 1-й, то 1-я (слабая) отпадёт, а 149-я станет слабой. А после этого совпадут две слабые стрелки – 2-я и 149-я, и их тоже не станет. Вот четыре стрелки и отвалились – две самые медленные и две самые быстрые.

– Погоди-ка, но тогда дальнейшее ясно! После этого отпадут ещё четыре стрелки – 3-я, 4-я, 147-я и 148-я, потом ещё четыре… Квартетами отпадают!

– Вот-вот. Но 150 не делится на 4. Поэтому самый «хвост» придётся проанализировать «вручную».

– Так это без проблем! Итак, в какой-то момент останется шесть стрелок. Номера их… э-э-э… от 73 до 78 включительно. Среди них и 74-я стрелка – та, что надо. Тогда 74-я стрелка сперва совпадёт с 78-й и «ослабнет», а потом – с 77-й, и… что же это получается? То же самое уравнение: $77t-74t=1$, и потому время получается такое же, как раньше – 20 минут! Не может быть!

– Как видишь, может. Но ты ещё не определил, когда стрелок вообще не станет.

– Нет проблем! После «отвала» последней четвёрки (73-й, 74-й, 77-й и 78-й) останутся лишь две: 75-я и 76-я. При первом соударении они станут слабыми, и отлетят только при втором. Поэтому разность пройденных ими расстояний составит не один, а два круга. Следовательно, $76t-75t=2$, и, значит, $t=2$. Через два часа! Ну что ж, хотя бы на 50 процентов вопросов я дал верный ответ.

– А если ещё чуть-чуть усложнить? Скажем, если каждая стрелка отпадает только после третьего совпадения?

– Думаю, ничего особенного. Та же песня. Для 74-й стрелки время останется прежним – 20 минут, а с последней… получается как для первого варианта – 1 час.

– Это почему?

– А потому, что здесь стрелки надо разбивать на группы по 6 штук. И поскольку 150 делится на 6, то последняя шестёрка – это стрелки с 73-й по 78-ю.

И потому 75-я стрелка сначала столкнётся с 78-й, потом с 77-й, а потом уже с 76-й – и отлетит. Здесь обгонять её на два круга не понадобится.

– Но, так или иначе, получается естественное обобщение. Ну, 74-ю стрелку отбросим, как частный случай, и зададимся вопросом: **когда часы останутся вообще без стрелок, если каждая стрелка отпадает после *n*-го совпадения с другими стрелками (где *n* – произвольное натуральное число)?**

– Ой, тут, боюсь, ждут нас неприятности. Пока n не слишком велико, конечно, можно что-то накопать... Например, если $n = 4$, то стрелки разбиваются на группы по 8 штук. Так как $150 = 8\cdot 18 + 6$, после исчезновения последней восьмёрки останется 6 стрелок – с 73-й по 78-ю. 75-я стрелка последовательно столкнётся с 78-й, 77-й и 76-й стрелками, но пока останется «жива». Причём последнее из этих столкновений (с 76-й стрелкой) произойдёт через 1 час. А дальше с какой стрелкой она столкнётся? Их пять штук, и они «разбрелись» по циферблату кто куда. Проблема...

– Никакой проблемы! Ты подумай – как раз через час они опять соберутся все вместе и будут смотреть вверх, но перед этим каждая «испытала» три соударения (притом последнее столкновение – «коллективное»: все шесть разом). Стало быть, очередное соударение после этого будет фатальным для каждой стрелки. И потому мы как бы получили исходную задачу, только стрелок здесь меньше – только шесть. Значит, ещё час – и их не станет. Сначала отпадут 73-я и 78-я, потом – 74-я и 77-я, и наконец – 75-я и 76-я. Так что стрелки полностью исчезнут через 2 часа.

– Стоп! Здесь ещё одна тонкость выплывает! Это самое «коллективное шестистрелочное» соударение – как его интерпретировать? Здесь ведь каждая стрелка совпадает одновременно с *пятью другими*. Можно ли считать это *одним* столкновением? Я думаю – нет, это всё-таки *пять* столкновений *каждой стрелки с каждой из остальных* – и никак иначе! Например, если тебя одновременно бьют пятеро – то и синяков будет в пять раз больше, чем в случае одного.

– Нашёл, что вспоминать! Когда это было-то? Хотя, в целом, убедительно.

– Но меня больше берут сомнения насчёт самой возможности повторного совпадения всех шести стрелок. Заметь – 73-я и 78-я стрелки совпадают через каждые $\frac{1}{5}$ часа (поскольку $78 - 73 = 5$). Поэтому когда пройдёт $\frac{4}{5}$ часа, они уже совпадут 4 раза и исчезнут. А скорее даже раньше, потому что наверняка произойдут их совпадения и с другими стрелками. Поэтому через час шесть стрелок вместе уж точно не соберутся.

– Как же быть?

– Придётся, наверно, составлять таблицу. Вот такую, ступенчатую. Строки пронумерованы от 73 до 77, столбцы – от 74 до 78, и в каждой ячейке – моменты времени в течение первого часа, когда совпадут стрелки с номерами, соответствующими строке и столбцу:

	74	75	76	77	78
73	1	$\frac{1}{2}$, 1	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1	$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1	$\frac{1}{5}$, $\frac{2}{5}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{4}{5}$, 1
74	×	1	$\frac{1}{2}$, 1	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1	$\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$, $\frac{3}{4}$, 1
75	×	×	1	$\frac{1}{2}$, 1	$\frac{1}{3}$, $\frac{2}{3}$, 1
76	×	×	×	1	$\frac{1}{2}$, 1
77	×	×	×	×	1

А теперь присвоим каждой стрелке по нулю баллов и будем «накапливать» баллы после каждого соударения. Как наберётся 4 балла – стрелку долой. И поглядим, что получится. Сначала для удобства все моменты времени расставим в порядке возрастания: $\frac{1}{5}, \frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{5}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, 1$. Итак, в момент, равный $\frac{1}{5}$ часа, совпадут 73-я и 78-я стрелки, и у них по одному баллу. А в момент $\frac{1}{4}$ часа совпадут 73-я и 77-я, а также 74-я и 78-я. Далее, в момент $\frac{1}{3}$ часа имеет место совпадение 73-й и 76-й, а также 74-й и 77-й, ну, и 75-й и 78-й стрелок. В момент $\frac{2}{5}$ опять совпали 73-я и 78-я стрелки, причём у них набралось по 4 балла, и потому они сразу и отвалились. В момент $\frac{1}{2}$ часа совпали 74-я и 76-я, а также 75-я и 77-я. В момент $\frac{3}{5}$ часа совпадений нет (всё, что могло совпасть, уже отлетело). Зато в момент $\frac{2}{3}$ часа совпадут 74-я и 77-я стрелки – и тоже отвалятся, потому что накопили по 4 балла. Что осталось? Только 75-я и 76-я стрелки. Они уже набрали по два балла и совпадают через каждый целый час (после начала отсчёта). Значит, по 4 балла они наберут за 2 часа. Итак, все стрелки исчезнут через 2 часа. Так что ты был прав. Но только в данном частном случае.

– Хорошо, а если $n=5$?

– Это полный аналог с $n=3$ и вообще с любым n, при котором 150 делится на $2n$. Рассуждения аналогичны, и ответ такой же: через час.

– Тогда пусть $n=6$...

– Нет, хватит! У меня уже от $n=4$ голова кругом пошла. По часовой стрелке. Так что в другой раз!

Вот каким образом, дорогие читатели, несложная задачка для младших школьников при попытке обобщения превратилась в довольно заковыристую проблему, за которую никто пока не брался. Сверх того, можно обобщать и дальше, считая, что исходное количество стрелок равно не 150, а некоторому натуральному k. А вопрос остаётся прежний: в какой момент времени часы окажутся без стрелок?

Кое-какие выводы, конечно, можно сделать из разговора двух наших собеседников. Например, если k делится на $2n$, то часы лишатся стрелок через час.

При $n=1$ и нечётном k легко видеть, что последовательно отпадут все стрелки, кроме одной – самой средней по скорости. Поэтому ответ здесь категоричен: никогда.

Для остальных k и n ответ в общем случае неизвестен. Кто сумеет одолеть проблему – просим не забыть поделиться с редакцией. Ждём!

Художник Алексей Вайнер

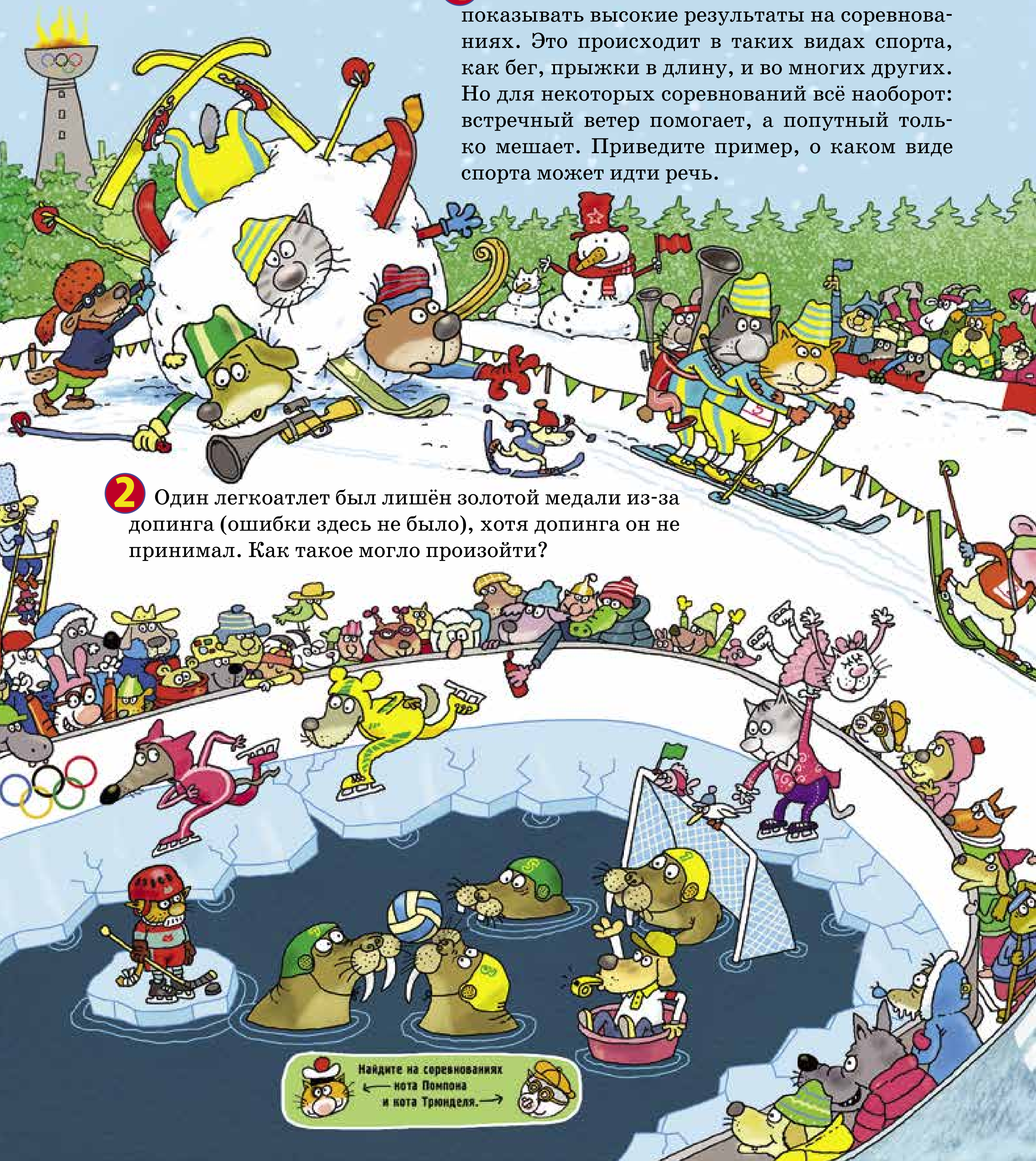
Четыре задачи

Материал подготовил
Михаил Евдокимов

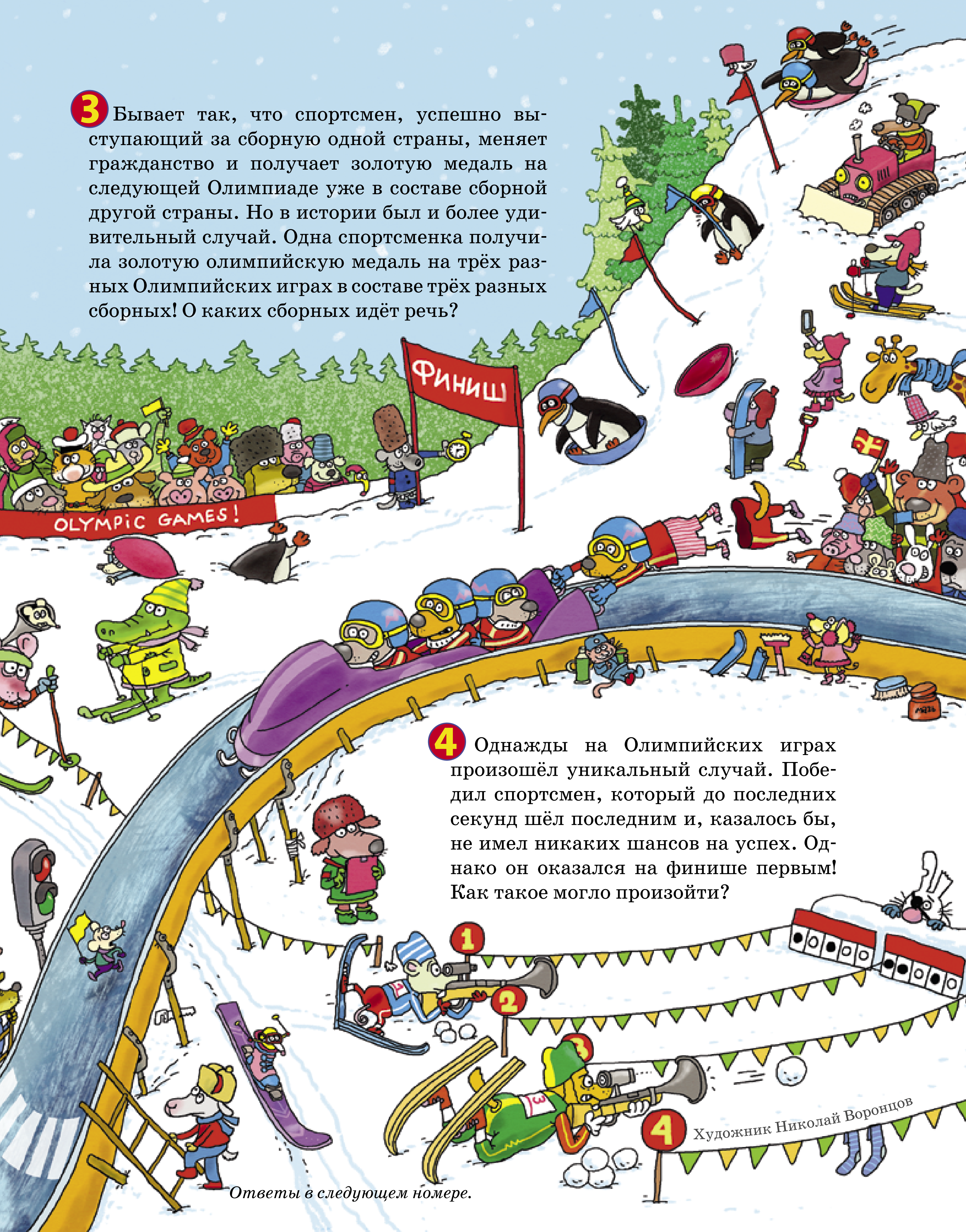
Вокруг спорта

1 Часто встречный ветер мешает спортсменам показывать высокие результаты на соревнованиях. Это происходит в таких видах спорта, как бег, прыжки в длину, и во многих других. Но для некоторых соревнований всё наоборот: встречный ветер помогает, а попутный только мешает. Приведите пример, о каком виде спорта может идти речь.

2 Один легкоатлет был лишён золотой медали из-за допинга (ошибки здесь не было), хотя допинга он не принимал. Как такое могло произойти?



3 Бывает так, что спортсмен, успешно выступающий за сборную одной страны, меняет гражданство и получает золотую медаль на следующей Олимпиаде уже в составе сборной другой страны. Но в истории был и более удивительный случай. Одна спортсменка получила золотую олимпийскую медаль на трёх разных Олимпийских играх в составе трёх разных сборных! О каких сборных идёт речь?



4 Однажды на Олимпийских играх произошёл уникальный случай. Победил спортсмен, который до последних секунд шёл последним и, казалось бы, не имел никаких шансов на успех. Однако он оказался на финише первым! Как такое могло произойти?

Художник Николай Воронцов

Ответы в следующем номере.

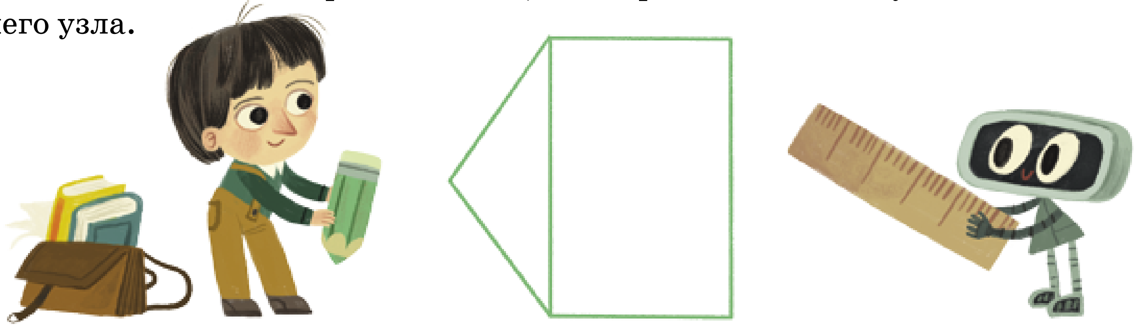
Женя Кац

Окончание. Начало см. в «Квантике» № 1, 2 и 3, 2017

УЗЛЫ, ЦЕПОЧКИ И МАТЕМАТИКА

КАК НАРИСОВАТЬ УЗЕЛ?

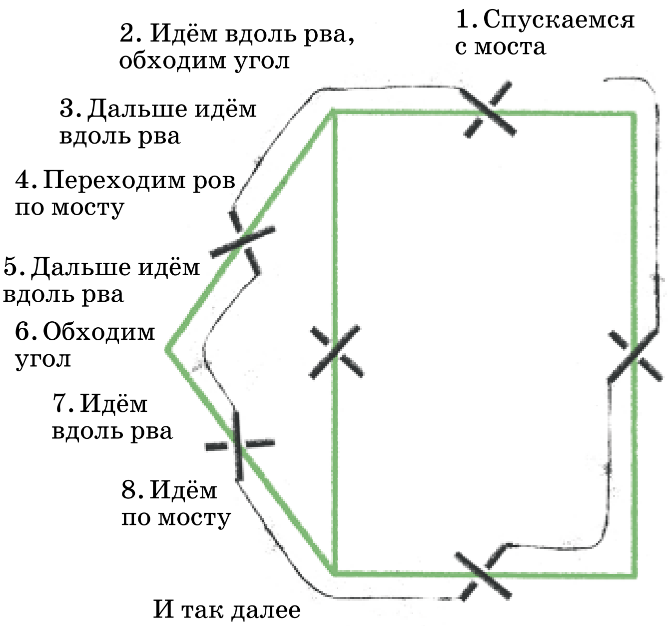
Возьмём несколько отрезков с общими вершинами. Это будет скелет нашего узла.



Пусть каждый отрезок будет рвом, мы будем через каждый ров перекидывать два мостика, верхний и нижний. Чтобы нарисовать верхний, чуть-чуть повернём отрезок в направлении движения часовой стрелки. Чтобы нарисовать нижний мостик, чуть-чуть повернём отрезок в другую сторону.

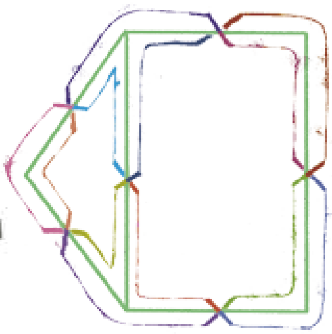
Нарисуем в середине каждого отрезка пересекающиеся мостики.

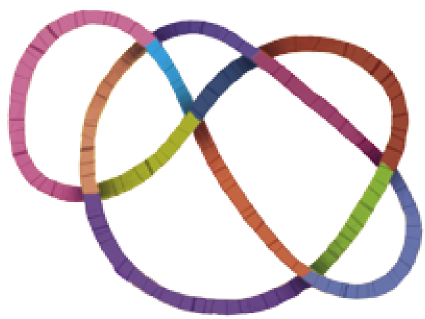
Теперь мы начинаем обходить мосты, соединяя их тропинками (см. рисунок вверху следующей страницы). Спускаемся с моста и идём вдоль рва. Обходим вершину (угол), заворачиваем и ищем ближайший мостик. Переходим ров по мостику и идём вдоль рва, теперь уже с другой стороны. Мы снова ищем ближайший мостик.



Когда мы обойдём все мостики, получится узел (см. картинку внизу слева)!

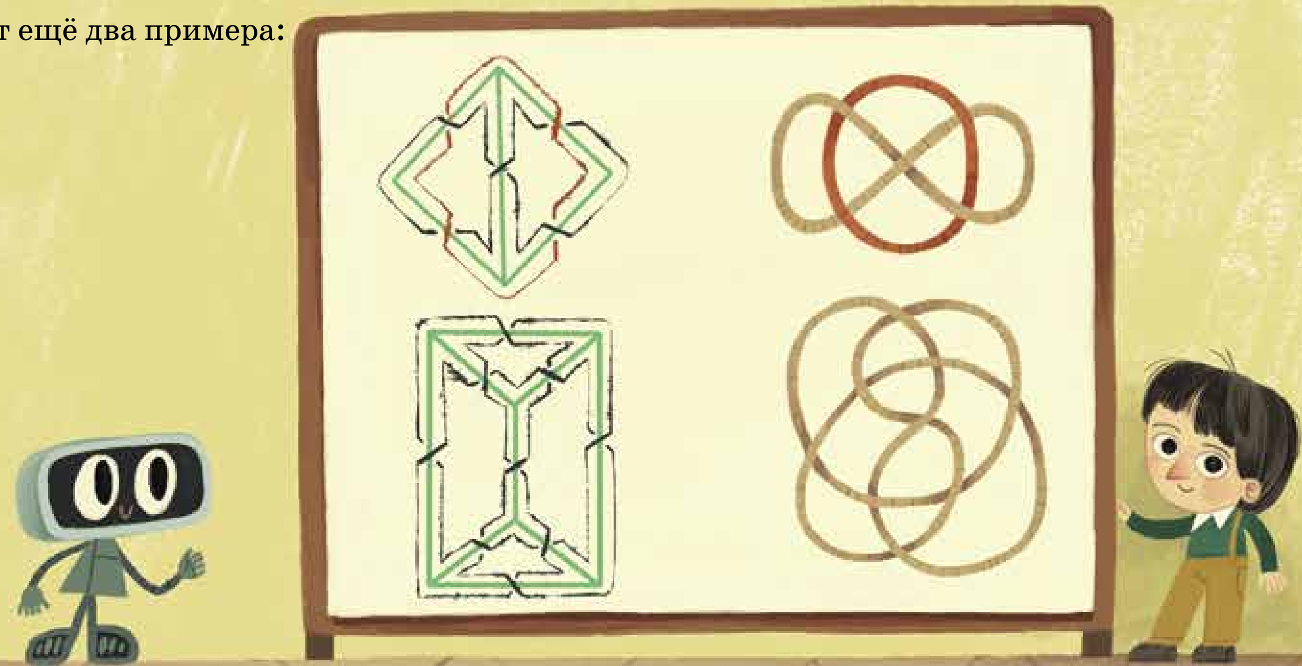
Перерисуем узел покрасивее, как на картинке внизу справа, а скелет не будем перерисовывать. Чтобы лучше увидеть, что справа тот же узел, что и слева, покрасим участки между соседними мостами – каждый такой участок в свой цвет – и сохраним цвета на правой картинке.





Обратите внимание, что когда мы идём по узлу, верхние и нижние мосты чередуются: скажем, если мы только что прошли по верхнему мосту, то в следующий раз пройдём по нижнему.

Вот ещё два примера:



В некоторых случаях получившийся узел состоит из одной верёвочки, а в каких-то ситуациях узел состоит из двух или трёх верёвочных колец. Найдите такие узлы.

Если у скелета каждый отрезок соединён обоими концами с другими отрезками, то получившийся узел нельзя распутать. Эту теорему математики доказывали почти 100 лет.

Нарисуйте узел, если мостики уже нарисованы:

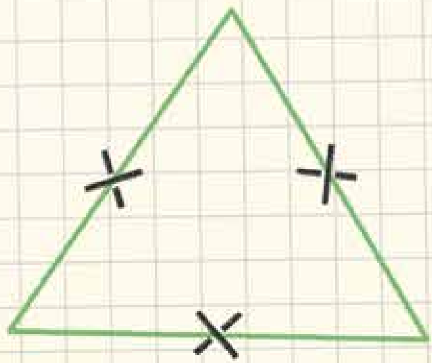


Рис. 1

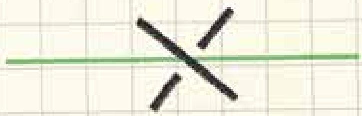


Рис. 2

СТРАНИЧКИ ДЛЯ МАЛЕНЬКИХ

Теперь мы можем нарисовать много разных красивых узлов, придумывая свои «скелеты». Рисуйте сначала мостики, а потом и сам узел. Посчитайте, сколько верёвочных колец получится. Перерисуйте получившиеся узлы на отдельный листок.

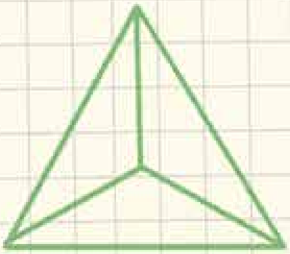


Рис. 3

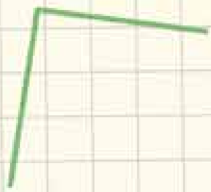


Рис. 4

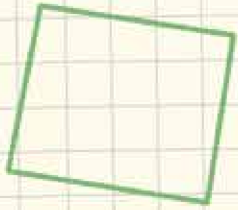


Рис. 5

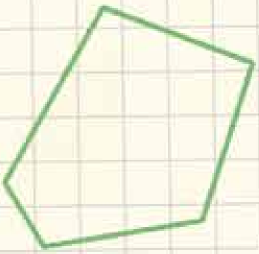


Рис. 6

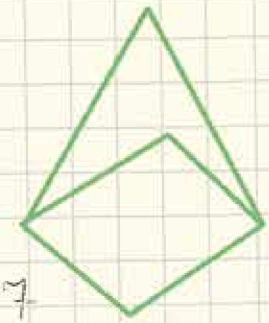
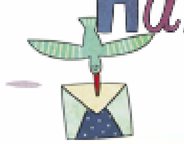


Рис. 7

Художник Ольга Демидова

НАМ ПИШУТ



КТО ПЕРВЫЙ?

Прочитав статью «Одно над другим» (первую из серии про узлы, цепочки и математику), один из наших читателей, ученик 2 класса Лев Черкашин, придумал свою задачу на тему статьи. Вот она:

Какую букву Квантик положил первой?

квеври

В древние времена вино в Грузии хранили в специальных глиняных сосудах – квеври, – которые зарывали в землю, накрывали сверху плоскими камнями и замазывали воском. Благодаря герметичности вино в таких сосудах могло храниться довольно долго.

На территории храма Светицховели в городе Мцхета были обнаружены сосуды разной вместимости: 100 л, 200 л, 500 л, 1000 л и так далее до 3000 л.

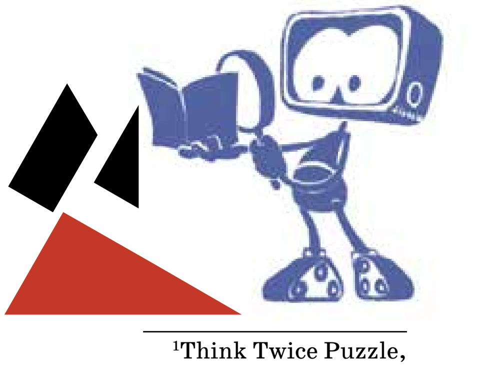
Почему квеври разного размера?

Автор Лидия Хесед
Художник Елена Цветаева

ДВАЖДЫ ПОДУМАЙ

Игры и Головоломки

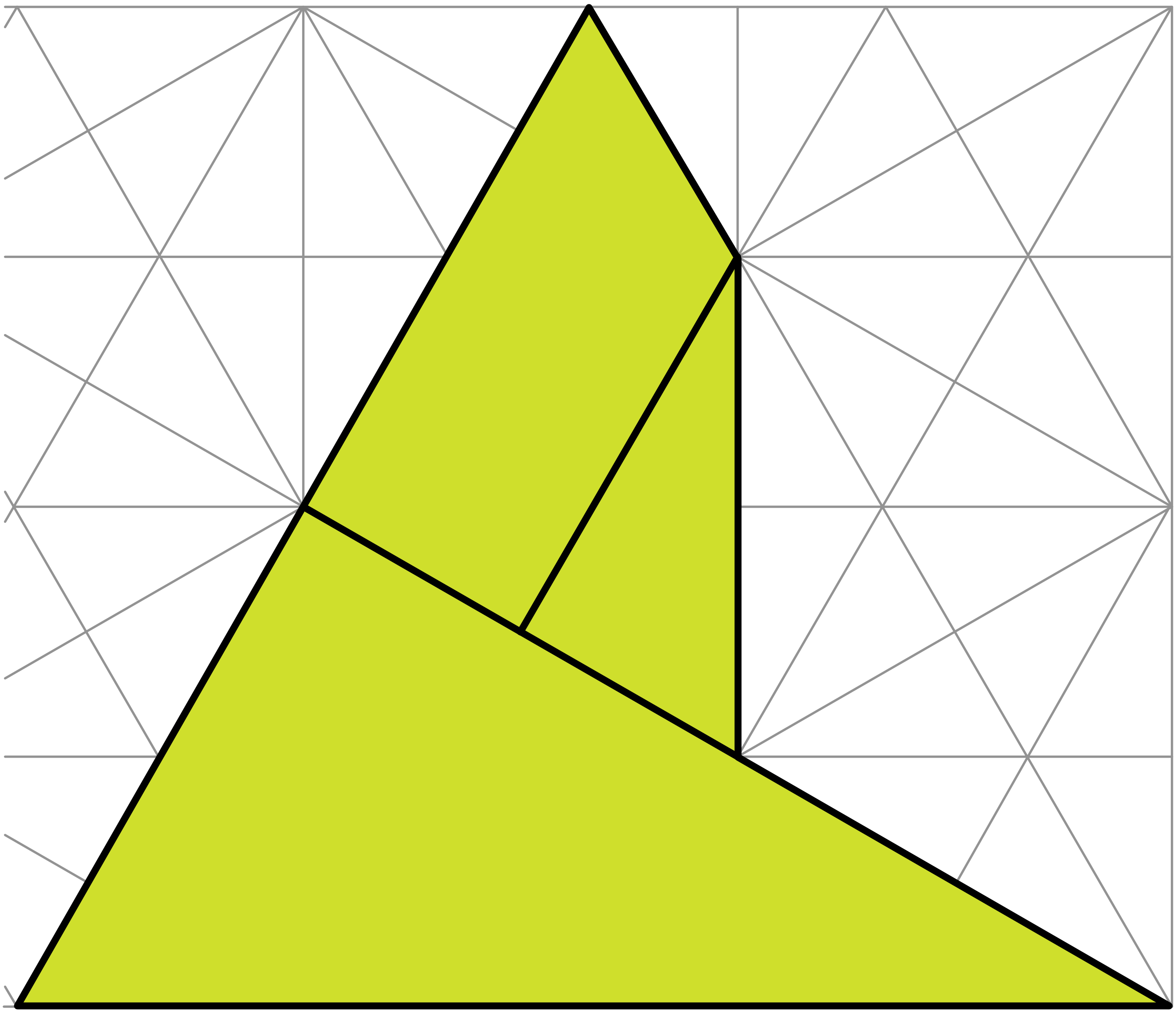
Владимир Красноухов



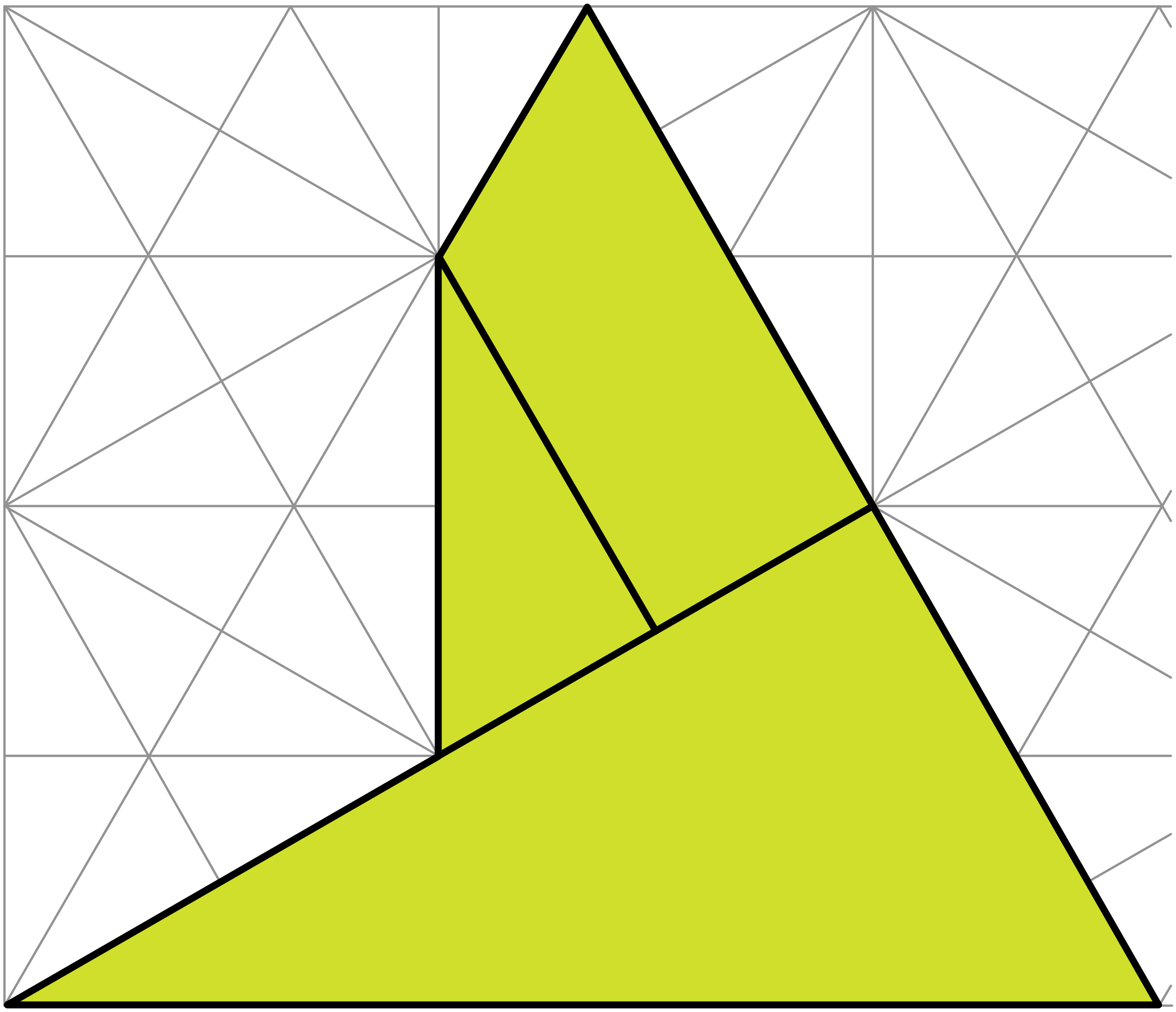
«Дважды подумай»[1] – одна из механических головоломок финала XIX Чемпионата России по пазлспорту, который состоялся в офисе «Яндекса» в Москве 4 июня 2016 года. С задачей справились семеро из 28 участников финала. На решение отводилось 10 минут, у вас же запас времени не ограничен.

Задача. Из элементов, изображённых на рисунке, сложите симметричную фигуру. Элементы можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Решение не единственно: одна из фигур (пятиугольник) строится сравнительно легко, другая – (не пятиугольник 🙂) – трудно. Фигурки скопируйте или вырежьте из журнала по схеме и наклейте на картон (для прочности). Желаем успехов!

[1]Think Twice Puzzle, V. Krasnoukhov © 2015.



Художник Yustas-07



КОНКУРС
ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ

Приглашаем всех желающих принять участие в конкурсе по русскому языку. Для победы вовсе не обязательно решить всё – присылайте то, что получится. Решения второго тура ждём по адресу kvantik@mccme.ru не позднее 1 июня. Победителей ждут призы. Желаем успеха!
Предлагайте задачи собственного сочинения – лучшие будут опубликованы!

II ТУР

6. Один маленький мальчик захотел узнать, в каком порядке идут в алфавите буквы Ъ, Ы и Ь. Мама посоветовала ему открыть словарь. Мальчик наугад открыл орфографический словарь, но ему повезло – он смог получить ответ на свой вопрос. На какой ближайшей к началу алфавита букве мог открыться словарь? Кратко поясните ваше решение.

С.А. Бурлак

7. «... электричка до станции Дружинино»
«электричка, ... до станции Дружинино»
Саша утверждает, что может заполнить оба пропуска одним и тем же способом. Как?

А.И. Иткин

8. Найдите два однокоренных существительных, одно из которых означает «Х», а второе отличается от первого добавлением звука *р* и означает «плохой Х».

И.Б. Иткин

9. Какое животное на Руси иногда называли словом *тпруша*?

О.А. Кузнецова

10. а) Напишите самое большое целое число, в русском названии которого нет ни одного заимствованного слова.

б) Напишите самое маленькое целое число, в русском названии которого нет ни одного заимствованного слова.

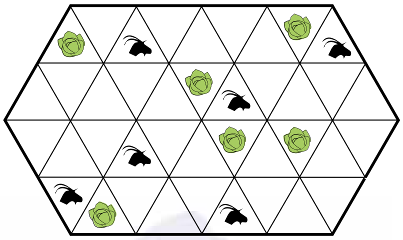
А.А. Сомин

Художник Николай Крутиков

XXVIII МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК

Очередной математический праздник для 6 и 7 классов собрал 19 февраля 2017 года в Москве рекордное число участников – более 9000. В один день уместились олимпиада, лекции, интеллектуальные игры, мультфильмы и даже концерт замечательного композитора и исполнителя Сергея Никитина... Подробности – на сайте **www.mccme.ru.**

6 класс



1 [4]. Фермер огородил снаружи участок земли и разделил его на треугольники со стороной 50 м. В некоторых треугольниках он высадил капусту, а в некоторые пустил пастись коз (см. рисунок слева). Помогите фермеру построить по линиям сетки дополнительные заборы как можно меньшей общей длины, чтобы защитить всю капусту от коз.

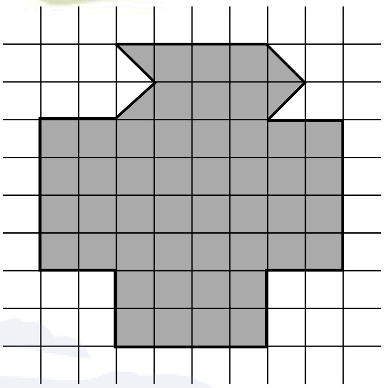
М.А.Хачатурян

2 [4]. На двух карточках записаны четыре различные цифры – по одной с каждой стороны карточки. Может ли оказаться так, что всякое двузначное число, которое можно сложить из этих карточек, будет простым? (Нельзя переворачивать цифры вверх ногами, то есть делать из цифры 6 цифру 9 и наоборот.)

А.В.Шаповалов

3 [5]. Среди всех граней восьми одинаковых по размеру кубиков треть синие, а остальные – красные. Из этих кубиков сложили большой куб. Теперь среди видимых граней кубиков ровно треть – красные. Докажите, что из этих кубиков можно сложить куб, полностью красный снаружи.

А.В.Шаповалов



4 [6]. Разрежьте фигуру (см. рисунок слева) на двенадцать одинаковых частей.

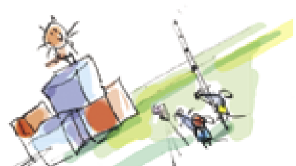
Е.В.Бакаев

5 [7]. Группа туристов делит печенье. Если они разделят поровну две одинаковые пачки, останется одно лишнее печенье. А если разделят поровну три такие же пачки, останется 13 лишних печений. Сколько туристов в группе?

И.В.Раскина

6 [8]. Кощей Бессмертный взял в плен 43 человека и увёз их на остров. Отправился Иван-Царевич на двухместной лодке выручать их. А Кощей ему и говорит:

– Надоело мне этих дармоедов кормить, пусть плывут отсюда на твоей лодке подобру-поздорову. Имей в виду: с острова на берег доплыть можно только



вдвоём, а обратно и один справится. Перед переправой я скажу каждому не менее чем про 40 других пленников, что это оборотни. Кому про кого скажу, сам выберешь. Если пленник про кого-то слышал, что тот оборотень, он с ним в лодку не сядет, а на берегу находиться сможет. Я заколдую их так, чтобы на суше они молчали, зато в лодке рассказывали друг другу про всех известных им оборотней. Пока хоть один пленник остаётся на острове, тебе с ними плавать нельзя. Лишь когда все 43 окажутся на том берегу, одному из них можно будет за тобой приплыть. А коли не сумеешь устроить им переправу – останешься у меня навсегда.

Есть ли у Ивана способ пройти испытание и вернуться с пленниками домой?

А.В.Шаповалов

7 класс

1 [4]. См. задачу 1 для 6 класса.

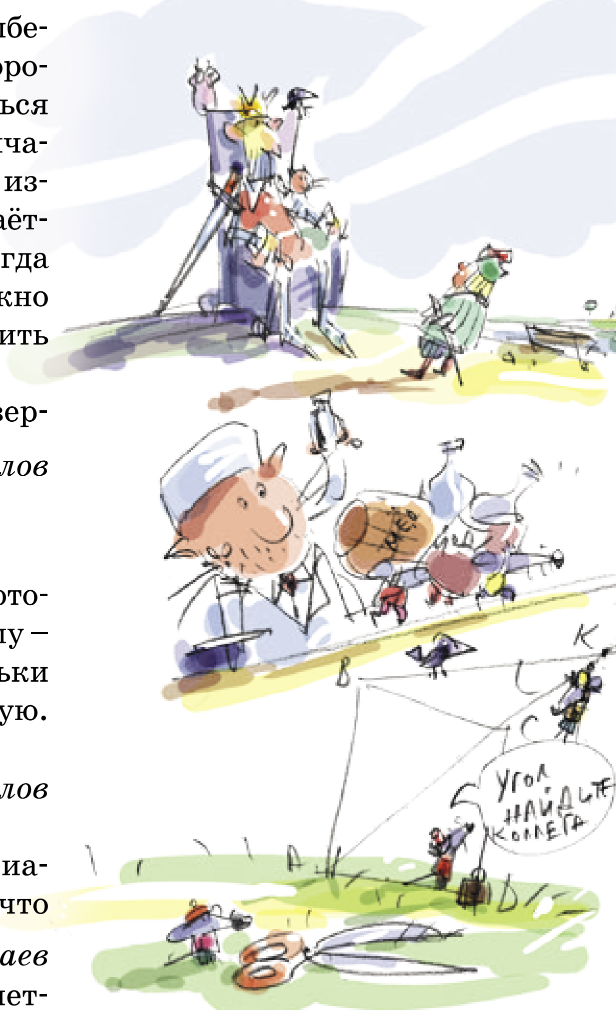
2 [4]. У аптекаря есть три гирьки, с помощью которых он одному покупателю отвесил 100 г йода, другому – 101 г мёда, а третьему – 102 г перекиси водорода. Гирьки он ставил всегда на одну чашу весов, а товар – на другую. Могло ли быть так, что каждая гирька легче 90 г?

А.В.Шаповалов

3 [6]. См. задачу 3 для 6 класса.

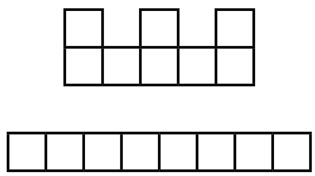
4 [6]. Дан квадрат $ABCD$. На продолжении диагонали AC за точку C отмечена такая точка K, что $BK=AC$. Найдите угол BKC.

Е.В.Бакаев



5. Можно ли так расставить цифры 1, 2, ..., 8 в клетках **а) [3]** буквы Ш; **б) [5]** полоски (см. рисунок), чтобы при любом разрезании фигуры на две части сумма всех цифр в одной из частей делилась на сумму всех цифр в другой? (Резать можно только по границам клеток. В каждой клетке должна стоять одна цифра, каждую цифру можно использовать только один раз.)

а



б

А.В.Шаповалов

6. [8] Среди 49 школьников каждый знаком не менее чем с 25 другими. Докажите, что можно их разбить на группы из 2 или 3 человек так, чтобы каждый был знаком со всеми в своей группе.

А.В.Шаповалов

Художник Сергей Чуб

КОНКУРС ПО РУССКОМУ ЯЗЫКУ, I ТУР
(«Квантик» № 1, 2017)

1. *Для всех натуральных $n \leqslant 9$, для которых это возможно, найдите слово (имя существительное, нарицательное, в словарной форме) из n букв, в котором не менее половины букв – буквы О.*

Для чётных n вариантов ответа много, нет даже необходимости приводить полные списки:

$n=2$: ***до*** (нота), ***ом***, ***ор***...

$n=4$: ***лото***, ***обои***, ***овод***, ***окно***...

$n=6$: ***зоолог***, ***молоко***, ***огород***...

$n=8$: ***околоток***, ***окорочок***...

Даже для $n=10$, не фигурировавшего в задаче, постоянная участница нашего конкурса Таисия Смирнова нашла термин *водооборот*.

С нечётными n дело обстоит куда интереснее. Для $n=1$ решения нет... или есть, если рассматривать само название буквы ***о*** как существительное среднего рода (*В слове «город» второе «о» – безударное*). Для $n=3$ и $n=5$ решение, судя по всему, единственно: ***око***, ***олово***. Для $n=7$ в современном русском литературном языке примеров, по-видимому, нет; но ведь область поиска можно и несколько расширить. Хорошо всем знакомое слово *облако* – заимствование из церковнославянского языка. Церковнославянскому сочетанию *-ла-* в исконно-русских словах часто соответствует *-оло-* (*глас – голос*, *влачить – волочить*); значит, должно было существовать слово *оболоко*. Действительно, это слово засвидетельствовано в древнерусских текстах, а возможно, и сейчас ещё сохранилось в каких-нибудь диалектах. А второклассник Костя Орлов прислал нам редкое слово *оморочо* – так в некоторых сибирских говорах называют самца рыси. Что касается $n=9$, для него подходящих примеров пока не обнаружено.

2. *Какая часть тела человека получила своё название в честь одежды?*

Эта часть тела – ***поясница*** (буквально «место, на котором носят пояс»). В принципе подходит и просто ответ ***пояс*** (в контекстах типа *руки на пояс* или *поклониться в пояс*), но всё-таки он смотрится чуть менее убедительно: *пояс* «одежда» и *пояс* «часть тела» – это два значения одного и того же слова, говорить, что одно из них «получило название в честь другого», несколько странно.

3. *Герои одной детской повести считают, что одна из станций «зелёной» (Замоскворецкой) линии московского метро названа в честь их учительницы. Назовите имя и отчество учительницы.*

Глядя на перечень станций Замоскворецкой линии, можно обратить внимание, что начало названия станции «Динамо» совпадает с женским именем Дина. В таком случае часть *-мо* должна совпадать с началом отчества учительницы. Мужских имён на *Мо-* несколько (*Модест*, *Мориц*, *Мокий*...), но все они сейчас употребляются не очень часто; пожалуй, чаще других можно встретить имя *Моисей*. Действительно, героиню повести Нины Дашевской «Я не тормоз» зовут **Дина Моисеевна**.

4. *Один редактор читал рукопись научно-популярной книги. В самом конце страницы ему попалась фраза, начинавшаяся так: «Когда в 1848 году тогда...» Редактор подумал, что здесь наверняка потребуется что-то исправлять, но, перевернув страницу, убедился, что фраза звучит вполне естественно и не содержит ни грамматических, ни пунктуационных ошибок.*

Попробуйте ответить как можно точнее: как выглядело продолжение этой фразы (достаточно привести первые 4–5 слов)?

Отсутствие запятой перед *тогда* указывает на то, что это слово входит в состав придаточного предложения, начинающегося с *когда*. Целиком фраза может выглядеть, допустим, примерно так: ***Когда в 1848 году тогда ещё никому не известный NN поступил в университет, он не знал, какое блестящее будущее его ожидает.***

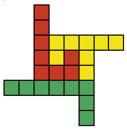
Добавим, что в основу задачи легла реальная история; во фразе, вызвавшей удивление редактора, шла речь о великом французском химике и микробиологе Луи Пастере (1822–1895), который в 1848 году был ещё действительно мало кому известен.

5. *Во время обеда маленький сын, показывая на свою тарелку, говорит маме: «Мама, поешь котлету». Мама берёт котлету и начинает её есть. Сын возмущается: «Да не поешь, а поешь!» (Реплики сына условно записаны в обычной русской орфографии.) Какую букву не выговаривает сын? Кратко поясните свой ответ.*

Разумеется, сын хотел попросить маму не съесть, а порезать вкусную котлету. Но поскольку сын **не выговаривает букву *р***, точнее, заменяет звуки [р] и [р'] звуком [й], слова *порежь* [пар'эш] и *поешь* [пайэш] в его исполнении звучат одинаково – как [пайэш].

НАШ КОНКУРС («Квантик» № 2, 2017)

26. *Разрежьте фигурку на рисунке на три части, равные по площади и периметру.*



Ответ: см. рисунок.

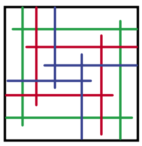
27. *По кругу сидело 10 болтунов. Сначала один из них рассказал один анекдот, следующий по часовой стрелке – два анекдота, следующий – три, и так далее по кругу, пока один не рассказал 100 анекдотов за раз. Тут болтуны устали, и следующий по часовой стрелке рассказал 99 анекдотов, следующий – 98, и так далее по кругу, пока один не рассказал всего один анекдот, и все разошлись. Сколько всего анекдотов рассказал каждый из этих 10 болтунов?*

Ответ: 1000 анекдотов.

Возьмём любого болтуна, кроме последнего, и следующего за ним. Сначала второй на каждом круге рассказывает на анекдот больше, чем первый – и так 10 кругов. А после того как болтуны устали, второй рассказывает на анекдот меньше – тоже 10 кругов. Значит, все рассказали поровну анекдотов – десятую часть общего количества. Всего анекдотов было рассказано $1+2+\ldots+99+100+99+\ldots+2+1=(1+99)+$ $+(2+98)+\ldots+(99+1)+100=100\cdot100=10\,000$.

28. *На каждой стороне квадрата отметили по три точки, отличные от его вершин. От каждой точки внутрь квадрата отложили по отрезку, перпендикулярному соответствующей стороне квадрата. Могло ли случиться, что каждый отрезок пересёк (под прямым углом) ровно а) 4 других отрезка; б) 5 других отрезков?*

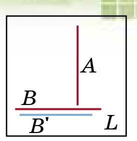
Ответы: а) могло; б) не могло.



а) Пример приведён на рисунке.

б) Пусть каждый отрезок пересекает под прямым углом 5 других. Для каждой стороны выделим ближайший к ней параллельный отрезок, если он один, и назовём его *крайним*. Отрезки, не являющиеся крайними, назовём *средними*. Всего крайних отрезков не более 4. Покажем сначала, что любые два средних перпендикулярных отрезка пересекаются.

Иначе, пусть есть два непересекающихся средних отрезка: A – вертикальный, B – горизонтальный. Тогда один из них, пусть A, лежит целиком по одну сторону от прямой, содержащей другой отрезок (B). Пусть L – горизонтальная сторона квадрата, лежащая по другую сторону от B, нежели A. Так как B средний, найдётся горизонтальный отрезок B', лежащий от L не дальше, чем B. Тогда A не пересекает B', следовательно, пересекает всего не более 4 отрезков. Противоречие.



Сопоставим теперь каждому горизонтальному отрезку единственный не пересекающий его вертикальный отрезок, и наоборот. Тогда все отрезки разобьются на пары. Заметим, что среднему отрезку в пару будет поставлен крайний отрезок (средний бы с ним пересекался). Значит, вертикальных крайних отрезков не меньше, чем горизонтальных средних. Но вертикальных крайних не более двух, а горизонтальных средних не менее 4 – противоречие!

29. *Все 36 карт колоды выложены рубашкой вверх в виде «квадрата» 6×6. За один вопрос игрок может выбрать 9 карт, образующих «квадрат» 3×3, и узнать набор карт, который им соответствует (без указания места, где какая карта лежит).*

а) Докажите, что за несколько вопросов игрок может определить любую карту, на которую укажет ведущий.

б) Какое наименьшее число вопросов достаточно, чтобы узнать угловую карту?

а) Очевидно, что если мы умеем определять карты, которые лежат в верхней левой четверти квадрата 6×6, то сможем определить и остальные карты. Зададим три вопроса: про квадрат 3×3, для которого карта ведущего лежит в левом верхнем углу этого квадрата, а также про квадраты 3×3, которые получаются из первого квадрата сдвигом на 1 вниз и на 1 вправо. Карта ведущего – единственная, которая лежит в первом квадрате, но не лежит ни во втором, ни в третьем, и мы её легко определим.

б) **Ответ:** 3 вопроса.

Докажем, что двух вопросов недостаточно. Пусть мы задали два вопроса (указали два квадрата). Тогда все 36 карт разделятся на 4 части: карты, которые входят в оба квадрата (1-я часть), только в первый квадрат (2-я), только во второй квадрат (3-я) и которые не входят ни в один квадрат (4-я). Если переставить между собой карты внутри любой части, то ответы на вопросы не изменятся. Значит, если карта ведущего попала в часть, в которой больше одной карты, то узнать карту ведущего мы не сможем.

Покажем, что часть, в которой находится угловая карта, содержит хотя бы 2 карты. Если угловая карта входит в оба квадрата

3×3, то они совпадают, и в этой части 9 карт. Если карта входит только в один из квадратов, то в этой части обязательно будет и одна из соседок угловой карты (либо в строке, либо в столбце). Если же карта не входит ни в один квадрат, то в этой части будет не менее $36-9-9=18$ карт.

30. *На стороне BC квадрата ABCD взяли точку M так, что BM в три раза длиннее MC. Докажите, что окружность, описанная около треугольника ABM, касается одной из сторон квадрата ABCD.*

Ответ: окружность касается стороны CD.

Пусть N – такая точка на стороне AD, что AN в три раза длиннее ND. Тогда $ABMN$ – прямоугольник. Его описанная окружность будет описанной окружностью и для треугольника ABM, а центр O этой окружности – точка пересечения диагоналей прямоугольника.

Пусть сторона квадрата равна 4, тогда $AB=4$, $BM=3$, откуда, по теореме Пифагора, $AM=5$, а радиус окружности равен 2,5. Расстояние от точки O до стороны AB равно половине стороны BM прямоугольника, то есть равно 1,5. Тогда расстояние от O до стороны CD равно $4-1{,}5=2{,}5$, то есть как раз равно радиусу окружности. Значит, окружность касается стороны CD (в её середине).

ДВА КАНАТА («Квантик» № 3, 2017)

Мы будем считать, что кольцо, прикреплённое к канату внизу, не пролезает в дугу, за которую зацеплен карабин в верхней части каната. Если пролезает, то решение упрощается. Как именно – разберитесь самостоятельно.

Сначала мастер лезет по левому канату на самый верх. Потом отцепляет карабин правого каната и пропускает всю длину каната через дугу его крепления, пока кольцо не упрётся в дугу. Затем перелезает на правый канат, отцепляет левый канат и прицепляет его карабином к кольцу правого каната. Получается один длинный двойной канат, по которому мастер спускается вниз. Внизу мастер спустит весь двойной канат, потянув за кольцо бывшего левого каната.

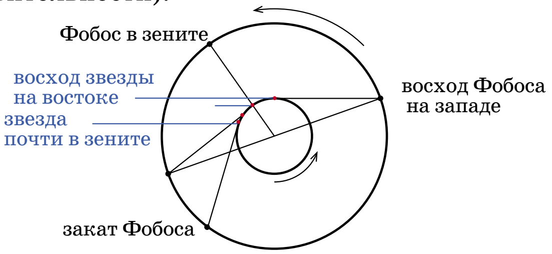
МАРС

Задача для старших. Как связаны масса атмосферы и давление на поверхности планеты?

Толщина атмосферы порядка 100 км (и у Земли, и у Марса) мала по сравнению с радиусом планеты. Поэтому давление $p=\frac{m_{атм}g}{S}=m_{атм}\frac{GM}{4\pi R^4}$, где M, R – соответственно масса и радиус планеты. Отсюда

$$\frac{p_З}{p_М}=\frac{m_{атмЗ}}{m_{атмМ}}\frac{M_З}{M_М}\frac{R_М{}^4}{R_З{}^4}=\frac{m_{атмЗ}}{m_{атмМ}}\frac{\rho_З}{\rho_М}\frac{R_М}{R_З}.$$

Задача. См. рисунок – вращение Марса и орбитальное движение Фобоса (отношение радиусов планеты и орбиты спутника – как в действительности).

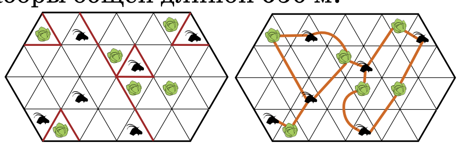


КВЕВРИ

В открытом сосуде вино долго храниться не может, но выпить за раз 1000 л трудно. Поэтому первым открывали самый маленький сосуд – 100 л. Когда вино из него выпивали, открывали следующий – 200 л. Половину выпивали, а половину переливали в пустой 100-литровый сосуд. И так далее, пока не доходили до самого большого квеври: его содержимое распределяли по более мелким, к тому моменту уже пустым.

XXVIII МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ПРАЗДНИК 6 КЛАСС

1. На левом рисунке показано, как построить заборы общей длиной 650 м.



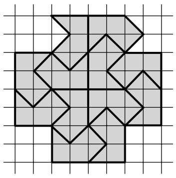
Комментарий. Докажем, что забор меньшей длины построить нельзя. На рисунке показаны 13 непересекающихся путей, по которому одна из коз доберётся до капусты. Каждый путь должен быть перекрыт забором, причём невозможно одним забором перекрыть сразу два пути. Значит, потребуется как минимум 13 заборов по 50 м.

2. Ответ: нет, не может.

Двузначные числа, оканчивающиеся на 0, 2, 4, 6, 8, чётны, а оканчивающиеся на 5 кратны пяти. Такие числа не будут простыми, и писать эти цифры на карточках нет смысла. Остаются 1, 3, 7 и 9. Если цифры 3 и 9 записаны на разных карточках, из них можно сложить составное число 39. Если они записаны на одной карточке, на второй записаны 1 и 7, и можно сложить составное число 91.

3. По условию, синие грани составляют 1/3 от их общего числа. На поверхности большого куба мы видим ровно половину граней каждого кубика (три из шести), то есть мы видим половину всех граней. Синих из них $2/3$, то есть $2/3 \cdot 1/2 = 1/3$ от их общего числа. Значит, все синие грани снаружи, и мы можем повернуть каждый кубик, спрятав эти грани внутрь.

4. См. рисунок.



5. Ответ: 23.

Разделим сначала две пачки печенья. Осталось одно лишнее. Разделим третью пачку. В ней $13-1=12$ лишних печений. Но тогда в двух пачках должно было быть $12 \cdot 2 = 24$ лишних печенья. Почему же на самом деле одно? Потому что $24-1=23$ печенья туристы смогли разделить поровну. Поскольку число 23 простое, это возможно, только если туристов 23.

Комментарий. Количество печений в пачке из условия задачи узнать нельзя. Их могло быть 12, 35, 58 и т. д.

6. Ответ: да, есть.

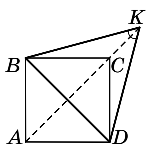
Иван может разбить пленников на 20 пар и одну тройку и велеть Кощею сказать каждому, что все, кроме входящих с ним в одну пару (тройку), – оборотни. Тогда условие будет выполнено, а переправиться пленники смогут вот как. Назовём пленников из тройки A, B и C. Сначала переправляются A и B, потом A возвращается обратно. Затем переправляется некоторая пара, а возвращается B. В результате одна пара пленников переправлена на берег, а все остальные и лодка находятся на острове. Аналогично переправляются остальные пары. Затем переправляются A и B, A возвращается и перевозит C. После этого C может отправиться за Иваном. При такой переправе никто в лодке никакой новой информации об оборотнях не узнал.

7 КЛАСС

2. Ответ: да, могло.

Подойдут гирьки 49,5 г, 50,5 г и 51,5 г. Первая и вторая гирьки вместе весят 100 г, первая и третья – 101 г, а вторая и третья – 102 г.

4. Ответ: 30°.



Поскольку картинка симметрична относительно прямой AC, имеем $DK = BK$. По условию $BK = AC$. А так как диагонали в квадрате равны, $AC = BD$. Таким образом, в треугольнике BKD все стороны равны, то есть он равносторонний, и $\angle BKD = 60°$. Опять же в силу симметрии относительно прямой AC имеем $\angle BKC = \angle DKC$, а в сумме эти углы составляют угол в 60°, то есть каждый из них равен 30°.

5. Пусть сумма чисел в одной из частей равна x, в другой y и y делится на x. Тогда и $x+y$ делится на x, а это сумма всех чисел, она равна $1+2+3+4+5+6+7+8=36$. Значит, меньшая из сумм частей является делителем числа 36. Верно и обратное: если 36 делится на x, то и оставшаяся сумма $36-x$ делится на x.

а) **Ответ:** да, можно: см. рисунок.

2		1		4
7	3	5	6	8

Для фигуры, заполненной как на рисунке, при разрезании на две части получаются такие меньшие суммы: 2, $2+7=9$, $2+7+3=12$, 1, $6+8+4=18$, $8+4=12$, 4. Все они – делители числа 36.

б) **Ответ:** нет, нельзя.

Выпишем все делители числа 36, меньшие этого числа, и их дополнения до 36: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18, 24, 27, 30, 32, 33, 34, 35. Пусть удалось расставить числа в полоске требуемым образом. Выпишем сумму чисел в первой клетке, первых двух клетках, первых трёх и т. д. Получится возрастающая последовательность из восьми чисел, первое из которых не больше 8, а последнее равно 36. При этом соседние члены этой последовательности различаются не больше чем на 8. В последовательности должно быть число 12, ведь иначе найдутся два соседних числа, одно из которых не больше 9, а другое не меньше 18, то есть разность будет не меньше 9 – противоречие. Аналогично в последовательности будут числа 18 и 24. Но тогда в двух разных клетках должно стоять число $6 = 18-12 = 24-18$. Противоречие.

6. Представим, что все 49 детей стоят в коридоре, и будем постепенно запускать их в класс, причём так, чтобы в классе в любой момент дети были разбиты на требуемые группы. Пусть в коридоре стоит школьник Фёдор. Если он знаком с каким-то другим школьником, стоящим в коридоре, то просто запустим их двоих в класс. Иначе все знакомые Фёдора уже в классе. Так как в классе менее 50 детей, они разбиты менее чем на 25 групп. Значит, среди знакомых Фёдора какие-то двое находятся в одной группе. Если это группа из 2 детей, впустим Фёдора в класс, добавив его к этой группе. Если же это группа из 3 детей, попросим одного из знакомых Фёдора образовать с ним группу, а оставшихся детей оставим вдвоём. Так, постепенно впуская детей в класс, мы добьёмся того, что все будут разделены на требуемые группы.

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем

заочном математическом конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 мая электронной почтой по адресу **matkonkurs@kvantik.com** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик»**.

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный почтовый адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа со списком участников. Итоги среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

VIII ТУР

36. Каждый номер журнала «Квантик» состоит из обложки и восьми двойных листов: они вкладываются друг в друга и соединяются скобами. На каком из восьми листов сумма номеров всех четырёх страниц листа самая большая?

37. Ноутик записал на доске три числа: $\frac{1}{9}$, $\frac{1}{10}$ и $\frac{1}{11}$. Квантик за ход называет любое число, а Ноутик увеличивает ровно одно из чисел на доске на число, названное Квантиком. Может ли Квантик делать ходы так, чтобы обязательно в какой-то момент хоть одно из трёх чисел на доске превратилось в 1?

Авторы: М. Варга (36), Дмитрий Баранов (37), Михаил Евдокимов (38), Алексей Канель-Белов (39), Сергей Дворянинов (40)

38. Фигуру, изображённую на рисунке, разрежьте по линиям сетки на две *одинаковые* части, из которых можно сложить квадрат 6×6 (части разрешается переворачивать).

39. В волшебном дворце обитают прекрасные феи. Каждый день у всех фей, кроме одной, улучшается и обаятельность, и привлекательность, а у оставшейся феи – только одно из этих качеств (а другое может и ухудшиться). Однако за последний год все феи совершенно не изменились. Каково наибольшее возможное число фей во дворце? (В году 365 дней.)

40. Из круга можно вырезать четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны a и c, а две другие – b и d. Толик Втулкин утверждает, что тогда из этого круга можно вырезать и четырёхугольник, у которого две противоположные стороны равны a и b, а две другие – c и d. Прав ли Толик? Решите задачу в случаях, когда исходный четырёхугольник

а) вписан в данный круг (вершины четырёхугольника лежат на границе круга);

б) не обязательно вписан, но выпуклый (диагонали лежат внутри четырёхугольника);

в) может быть невыпуклым (одна из диагоналей может лежать снаружи четырёхугольника).

Художник Николай Крутиков

Бильяж

Бильяж – это два зеркала, соединённых вместе. В комнате смеха есть два интересных бильяжа. Каждый сделан из пары квадратных зеркал, соединённых по общей стороне, но в первом бильяже угол между зеркалами 90°, а во втором – 60°. Бильяжи прикреплены к колоннам так, как показано на рисунке, и могут немного вращаться вокруг вертикальной оси вправо-влево.

Квантик заметил, что если смотреть в центр одного из них и чуть вращать бильяж, отражение остаётся на месте. Если же смотреть в центр другого бильяжа и чуть поворачивать бильяж вправо-влево, отражение тоже ездит туда-сюда.

Какой из бильяжей оставляет отражение на месте?

Художник Мария Усеинова

ISSN 2227-7986