

Ж У Р Н А Л К В А Н Т И К

Д Л Я Л Ю Б О З Н А Т Е Л Ь Н Ы Х



№ 8
август
2016

ЗЕРКАЛЬНЫЕ НЕЙРОНЫ

ПАРАДОКС
ДВУХ
КОНВЕРТОВ

ЧУДЕСА
МАГНИТНОЙ
СТРЕЛКИ



ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Оформить подписку на журнал «КВАНТИК»
вы можете в любом отделении связи Почты России или через Интернет.

■ Подписка на почте:

- ♦ **КАТАЛОГ «ГАЗЕТЫ. ЖУРНАЛЫ» АГЕНТСТВА «РОСПЕЧАТЬ»**
(индекс **84252**)
- ♦ **«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ» МАП**
(индекс **11346**)

■ Подписка на сайте vipishi.ru:

- ♦ **«КАТАЛОГ РОССИЙСКОЙ ПРЕССЫ»**
(индекс **11346**)

Подробнее обо всех видах подписки читайте
на сайте kvantik.com/podpiska.html

Кроме журнала, редакция «Квантика» выпускает альманахи, плакаты и календари загадок



В июле 2016 года вышел новый альманах,
уже 8-й по счёту. В нём собраны материалы
журнала «Квантик» за второе полугодие 2015 г.



Подробнее о продукции «Квантика» и о том, как
её купить, читайте на нашем сайте kvantik.com

www.kvantik.com

kvantik@mccme.ru

[instagram.com/kvantik12](https://www.instagram.com/kvantik12)

kvantik12.livejournal.com

[facebook.com/kvantik12](https://www.facebook.com/kvantik12)

vk.com/kvantik12

twitter.com/kvantik_journal

ok.ru/kvantik12

Журнал «Квантик» № 8, август 2016 г.
Издаётся с января 2012 года · Выходит 1 раз в месяц.
Свидетельство о регистрации СМИ:
ПИ № ФС77-44928 от 04 мая 2011 г.
выдано Федеральной службой по надзору в сфере
связи, информационных технологий и массовых
коммуникаций (Роскомнадзор).

Главный редактор: С.А. Дориченко
Редакция: В.А. Дрёмов, Д.М. Кожемякина,
Е.А. Котко, И.А. Маховая, А.Б. Меньщиков,
М.В. Прасолов, О.Н. Хвостикова
Художественный редактор
и главный художник: Yustas-07
Верстка: Р.К. Шагеева, И.Х. Гумерова
Обложка: художник Yustas-07

Учредитель и издатель:
Негосударственное образовательное
учреждение «Московский Центр непрерывного
математического образования»
Адрес редакции и издателя: 119002, г. Москва,
Большой Власьевский пер., д. 11
Тел.: (499) 241-08-04, e-mail: kvantik@mccme.ru,
сайт: www.kvantik.com

**Подписка на журнал в отделениях связи
Почты России:**
• Каталог «Газеты. Журналы» агентства
«Роспечать» (индекс **84252**)
• «Каталог Российской прессы» МАП
(индексы **11346** и **11348**)
Онлайн-подписка по «Каталогу Российской
прессы» на сайте vipishi.ru

По вопросам распространения обращаться
по телефону **(495) 745-80-31**
и e-mail: biblio@mccme.ru
Формат 84x108/16
Тираж: 7000 экз.
Подписано в печать: 07.07.2016
Отпечатано в соответствии
с предоставленными материалами
в ООО «ИПК Парето-Принт»,
Адрес типографии: 170546, Тверская обл.,
Калининский р-н, с/п Бурашевское,
ТПЗ Боровлево-1, 3«А»
www.pareto-print.ru
Заказ №
Цена свободная
ISSN 2227-7986

6+

IPAC



■ МАТЕМАТИЧЕСКИЕ СЮРПРИЗЫ		
Парадокс двух конвертов.	<i>А. Алаева</i>	2
■ ДЕТЕКТИВНЫЕ ИСТОРИИ		
Легенды Санкт-Петербурга.	<i>Б. Дружинин</i>	7
Четвёртый побег.	<i>М. Евдокимов</i>	16
■ МАТЕМАТИЧЕСКИЙ КРУЖОК		
Коровы Исаака Ньютона.	<i>И. Акулич</i>	10
■ ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ		
Зеркальные нейроны.	<i>В. Винниченко</i>	13
■ КАК ЭТО УСТРОЕНО		
Чудеса магнитной стрелки.	<i>А. Щетников</i>	18
Почему пчёлы общественные, а бабочки нет?	<i>П. Волцит</i>	20
■ ИГРЫ И ГОЛОВОЛОМКИ		
Паттерн-головоломка.	<i>В. Красноухов</i>	24
■ ЧУДЕСА ЛИНГВИСТИКИ		
Словобусы.	<i>О. Кузнецова</i>	25
■ ОТВЕТЫ		
Ответы, указания, решения		28
■ ОЛИМПИАДЫ		
Наш конкурс		32
■ ЗАДАЧИ В КАРТИНКАХ		
Змейка из кубиков		IV с. обложки



Парадокс двух конвертов

Маша и профессор Иван Петрович – большие друзья. Профессор частенько ставит её в тупик хитрыми и заковырыстыми задачками.

Однажды, когда Иван Петрович исследовал свой новый генератор случайных чисел, к нему пришла Маша. Профессору пришлось немного отвлечься:

– Ты знаешь, Маша, что такое генератор случайных чисел (ГСЧ) и для чего он используется?

– Нет, – ответила Маша.

– О, это очень полезная штука. Генератор придумывает случайные числа в определённом диапазоне. Сделать хороший ГСЧ очень непросто – числа должны быть как можно более случайными. Без случайных чисел невозможен почти ни один статистический эксперимент, даже интернет без него никак не может.

– Это как? – воскликнула Маша.

– Современный интернет немислим без шифрования, а шифрование невозможно без хороших ГСЧ. Ну и куда же без игр! Случайные числа дают разнообразие во многих играх. Давай сыграем в одну. Сейчас мой ГСЧ выберет совершенно случайное число из большого интервала.

– А что такое большой интервал?

– От нуля до какого-то очень большого числа.

– А до какого?

– А я даже не знаю. Генератор хитрый.

– До миллиона?

– Может, и до миллиона. Или меньше... А может, и больше. Одно могу сказать – до большого. Не отвлекайся. Генератор выберет какое-то число, разделит его в отношении один к двум, получившиеся два числа напечатает на двух листках бумаги. Подсматривать пока нельзя. Потом ты наугад выберешь себе листок, а второй я возьму себе. Тебе разрешается посмотреть, какое число на твоём листке. Затем ты решишь, хочешь ли ты поменяться листками. Каждый выиграет столько очков, какое число у него окажется. Начнём?

Профессор запустил ГСЧ, который сделал всё, как было велено. Из принтера вылезли два листка.

Профессор не глядя схватил их, сложил вчетверо и быстро несколько раз поменял местами. Маша зажмурила глаза, покрутилась на месте, бормоча про себя считалочку, а затем ткнула пальцем в один из листов. Развернув листок, она увидела число 12024,754. Чтобы лучше сосредоточиться, Маша стала рассуждать вслух¹.

– У меня около 12000. С одинаковыми шансами ваше число может быть вдвое больше (примерно 24000) или вдвое меньше (около 6000). Значит, если я поменяюсь, то рискую потерять примерно 6000, но в случае удачи получу число на 12000 больше, то есть ожидание больше², чем у меня сейчас. Значит, мне выгодно поменять листок! – воскликнула Маша.

Она решительно отобрала у Ивана Петровича его листок и снова задумалась:

– Хм, Иван Петрович, а ведь вам тоже выгодно меняться – ведь вы в таком же положении, как и я. То есть... если конечно... я имею в виду... хотя всё равно... Странная игра какая-то: мне выгодно и вам выгодно, а выигрывает только один. А если бы мы не подсматривали в свои листки? Всё равно было бы выгодно поменяться. А когда поменялись – ещё раз выгодно поменяться, и так до бесконечности! Ерунда какая-то! – пожаловалась Маша.

Иван Петрович хитро улыбнулся и сказал:

– Ты сейчас сформулировала парадокс двух конвертов. Впервые похожую задачу в 1953 году предложил бельгийский математик Морис Крайчик на примере двух галстуков.

Каждый из двух господ считает, что его галстук красивее. Чтобы решить спор, они обращаются к третьему, известному тонким вкусом в вопросах галстучной моды. Победитель должен подарить побеждённо-

¹ Она всегда так делает в затруднительной ситуации.

² Образованная Маша говорит о математическом ожидании числа на втором листке. Она имеет в виду

$$(12014,754 : 2) \cdot \frac{1}{2} + (12014,754 \cdot 2) \cdot \frac{1}{2} = 15018,4425.$$

Это число в 1,25 раза больше, чем число, которое у Маши сейчас. Потому Маша и хочет поменяться.



му свой галстук в утешение. Каждый из спорщиков рассуждает следующим образом: «Вероятности выигрыша и проигрыша равны. Я знаю, насколько красив мой галстук. Конечно, я могу лишиться его, но в случае проигрыша буду иметь два галстука – мой и ещё более красивый. Поэтому преимущество на моей стороне». Как может в одной игре с двумя участниками преимущество быть на стороне каждого?

Сейчас парадокс больше известен как парадокс двух конвертов³: есть два неразличимых конверта с деньгами. В одном находится сумма денег в два раза больше, чем в другом. Конверты дают двум игрокам. Каждый из них может открыть свой конверт и пересчитать в нём деньги. После этого игроки должны решить: стоит ли обменять свой конверт на чужой?

– Мария, давай посмотрим, а есть ли парадокс на самом деле. Все твои рассуждения основаны на том, что шансы того, что число на втором листке будет в два раза больше или в два раза меньше, равны. Но так ли это?

Предположим, что мама купила конфет и предложила тебе сыграть в такую же игру, но с конфетами. Она разделила их в отношении один к двум и одну из этих частей – случайно выбранную – дала тебе. Тебе досталось 500 г. Как ты думаешь, стоит ли тебе поменяться в данном случае?

– Ну, нет! – воскликнула Маша. – Я не верю, что мама за один раз купит полтора килограмма конфет!

– Вот видишь, при наличии информации о том, сколько обычно мама покупает конфет, ты оценила шансы вовсе не как одинаковые, – сказал профессор. – Вот одна из ловушек, в которую часто попадает человек. Если у нас нет полной информации о событиях, люди часто почему-то считают их шансы одинаковыми.

Профессор продолжил.

– Давай ещё раз посмотрим на нашу игру внимательно. Мы выбрали число, разделили его в отношении

³ В разных похожих формулировках задача носит название «парадокс двух шкатулок», «парадокс двух карманов», «парадокс обмена» и т.д.

один к двум, получившиеся числа напечатали на листках и дали один из них тебе. Наудачу мы выбрали только исходное число и доставшийся тебе листок, но не написанные числа! Ты считаешь математическое ожидание числа на втором листке, исходя из числа на первом. Когда речь пошла о конфетах, ты быстро сообщила, что 500 г – это много и менять ничего не надо: ты прикинула границы маминой щедрости и переоценила вероятности. А почему же ты не делаешь этого в случае с числами?

Маша задумалась:

– От конфет бывает диатез. И ещё они дорого стоят. А числа бесплатные, и диатеза от них не бывает. И с чего бы ваш генератор стал жадничать?

– Мой генератор, голубушка, конечно, не твоя мама, но тоже вовсе не аттракцион невиданной щедрости.

Маша не слушала ехидного профессора и продолжала:

– Исходное число не может быть бесконечно большим, значит, чем больше число на моём листке, тем больше шансов, что на другом меньшее число, и наоборот. Но только что такое «маленькое» и «большое» – ведь я не знаю, какое число выбрал генератор...

– Так и есть, – подтвердил профессор, – но, как и в случае с мамиными конфетами, есть граница: генератор не может дать любое число. Он выбирает его из большого интервала, но не бесконечного. Мы не знаем границу, но это не значит, что её нет. И равных шансов нет! И парадокса нет!

– Да, – Маша вздохнула, – чего нихватишься, ничего нет.

– Ты вот лучше скажи, какие уроки мы получили из всего этого?

– Во-первых, – Маша замолчала было, но всё же справилась с мыслью, – при отсутствии информации о шансах событий не следует их считать равными. Во-вторых, если в ходе игры мы получаем новую информацию, то хорошо бы знать, изменились ли после





этого вероятности и как. До того как я развернула свой листок, я ещё могла считать, что на втором листке число больше или меньше с одинаковыми вероятностями. Но после того как я узнала своё число, эти вероятности для меня изменились, но только я не знаю как – ведь я не знаю числа, которое загадал ваш противный и жадный ГЧС.

– Не ГЧС, а ГСЧ. И дело даже не в исходном числе. Если тебе известно максимальное число, которое генератор может дать, сумеешь ли ты предложить выигрышную стратегию в этой игре? – спросил профессор.

– Кажется, да! – воскликнула Маша. – Если моё число больше трети максимально возможного, то листок менять нельзя, а если меньше, то непонятно, но я бы поменяла.

– Неплохо, неплохо, – потёр ладони профессор, – теперь давай немного изменим правила. Мы с генератором, как и прежде, втайне от тебя загадываем число, я записываю его на листке бумаги, сворачиваю и даю тебе. Потом бросаю монетку. Если выпал орёл, на другом листке пишу число вдвое больше, чем твоё, а если решка – вдвое меньше. Теперь ты должна решить, менять листок или нет. Как будешь действовать?

Немного подумав, Маша стала рассуждать:

– В этой игре число на втором листке с равными шансами определяет монета, и они не меняются в ходе игры. Значит, мои рассуждения о математическом ожидании числа на втором листке будут верными, и мне надо всегда меняться!

– Конечно, – улыбнулся в ответ Иван Петрович. – Ты уловила разницу между новой игрой, в которую, как ты думала, играла раньше, и той, что была на самом деле. Вероятностные парадоксы так обычно и получаются: люди играют в одну игру, а думают, что в другую. Теперь тебя на мякине не проведёшь.

– А всё же жаль, Иван Петрович. Парадокс – это так увлекательно, так таинственно.

– Не волнуйся, Машенька. На твой век парадоксов хватит.

На весенние каникулы Лиза и Вова вместе с классом отправились в Санкт-Петербург. Все дни они проводили на экскурсиях и только вечером, усталые, возвращались в школу, предоставившую им кров. Ребята побывали во всех музеях, ознакомились с историей города. Оказывается, Санкт-Петербург несколько раз менял название. Со дня основания в 1703 году и до начала войны с Германией в 1914 году он носил имя Санкт-Петербург. 18 августа 1914 года его переименовали в Петроград, чтобы убрать немецкое окончание «бург». 26 января 1924 года город получил имя Ленинград, а 6 сентября 1991 года ему вернули имя, данное при рождении, – Санкт-Петербург.

Побывали наши друзья и на улице Льва Толстого, дом 9А, в музее занимательных наук «ЛабиринтУм». Особенно им понравилась научная лаборатория, где ребята могли сами ставить физические и химические опыты. Экскурсовод предложил школьникам оценить массу воздуха в помещении.

– Грамм на сто потянет, – первым откликнулся Миша. – Нет, грамм сто десять.

– Такая точность не нужна, – заметил экскурсовод. – Надо просто оценить. Приблизительно. Сто грамм, килограмм, а может и вся тонна?

– Воздух тоже что-то весит, – задумчиво произнёс кто-то.

– Ладно вам смеяться, – отмахнулся Миша. – Газ, он и есть газ. Что он может весить?

– Не скажи, – возразила Оля. – У нас на даче газ в баллонах. Так когда пустой баллон на замену в тележке везёшь, ещё ничего. А обратно полный баллон даже на тележке с трудом двигаешь, такой он тяжёлый.

В конце концов ребята с помощью интернета выяснили, какова плотность воздуха в обычных условиях, и правильно оценили массу воздуха в лабораторном зале.

Оцените массу воздуха в помещении, в котором вы сейчас находитесь, а ещё лучше – в классе вашей школы.





Одна из экскурсий посвящалась мостам, которых в Санкт-Петербурге насчитывается 342, из них 13 мостов разводные. Самый длинный мост – Большой Обуховский, через Неву. Его длина 2820 метров. Самый длинный разводной мост – Александра Невского. Его длина 910 метров.

И, конечно же, всем хотелось побывать на легендарном Поцелуевом мосту.

– А знает ли кто-нибудь, – поинтересовался экскурсовод, – почему мост так называется?

– Тут где-то неподалёку тюрьма, – ответил Вова. – Когда туда арестантов вели, тут родные с ними последний раз целовались.

– Нет, – возразила Зина. – Рядом казармы матросские находились. На этом мосту моряки со своими девушками прощались.

– Всё гораздо проще, – сказала Маша. – Тут влюблённые часто свидания назначают. Про это даже песенку сочинили.

– На самом деле в названии «Поцелуев мост» нет никакой романтики, – поведал экскурсовод. – Просто рядом с мостом в XVIII веке жил купец по фамилии Поцелуев. Он держал трактир под названием «Поцелуй». Трактир был хорошо известен в городе, поэтому его название закрепилось за ближайшим к нему мостом. Вот так простой человек стал городской знаменитостью.

– И вы всё знаете про Санкт-Петербург и его знаменитостей? – с хитрой улыбкой поинтересовалась Лиза у экскурсовода.

– Всего знать нельзя, – также улыбнулся в ответ экскурсовод. – Но пока отвечал на любые вопросы.

– Тогда скажите, какой житель Санкт-Петербурга появился на свет в 1876 году в возрасте 12 лет и сразу стал знаменитым?

Экскурсовод задумался. Задумались и одноклассники. Через пять минут экскурсовод сдался, а Вова хлопнул себя по лбу и радостно объявил имя знаменитости.

Накануне отъезда Лиза и Вова решили погулять по вечернему Санкт-Петербургу, чтобы посмотреть, как разводят мосты через Неву. Они попали под ли-

вень, но их подобрал проезжающий на патрульной машине капитан полиции и отвёз в отделение. Там друзья просохли и напились чаю. Капитан рассказал им удивительную историю.

– Задержали мы как-то мошенника. Он изумительно подделывал любые документы, а изготовленные им денежные купюры не могло распознать ни одно специальное устройство. Посадили этого мошенника. Так представляете, он, находясь в тюрьме, сумел изготовить постановление о своём освобождении и вышел на свободу.

В комнату заглянул лейтенант.

– Товарищ капитан, – доложил он, – бабушка везла в метро внукам пирожки с капустой. Она задремала, и кто-то эти пирожки похитил. Бабушка проснулась и задержала всех, кто ехал с ней в вагоне. Всего восемь человек. Только как узнать воришку? Пирожки-то он просто съел. Вот список подозреваемых.

Фамилия	Год рождения	Место рождения
Алексеев Е. К.	2000	Санкт-Петербург
Егорова М. Б.	1985	Ростов-на-Дону
Петров И. М.	1987	Санкт-Петербург
Рогов П. М.	1992	Санкт-Петербург
Степанова Е. Н.	1995	Санкт-Петербург
Фурсенко М. М.	1996	Санкт-Петербург
Максимов А. А.	1998	Магадан
Саидов Б. Р.	1979	Ташкент

– Да-а, – вздохнул капитан. – Не залезать же им в желудок, чтобы определить съевшего пирожки.

– Очень просто, – вмешалась в разговор Лиза. – Обратите внимание вот на этого типа.

– И, возможно, вы поймали своего неуловимого мошенника, – добавил Вова.

На что обратили внимание Лиза и Вова?

У подозреваемого сняли отпечатки пальцев, проверили по картотеке и убедились, что перед ними тот самый мошенник. Так закончилось путешествие в Санкт-Петербург. Дома Вова и Лиза рассказали роботу Квантику о своих приключениях, и тот похвалил их за сообразительность.



Коровы Исаака Ньютона

По некоторым сведениям, эту сельскохозяйственную задачу предложил сам Исаак Ньютон, или, по крайней мере, кто-то из его современников¹:

Трава на всём лугу растёт одинаково густо и быстро. Известно, что 70 коров поели бы её в 24 дня, а 30 коров – в 60 дней. Сколько коров поели бы всю траву луга в 96 дней?

Прямой и с виду естественный подход наталкивается на непреодолимые трудности. В самом деле, 96 дней больше, чем 24 дня, ровно в 4 раза. Поэтому если 70 коров съедят траву в 24 дня, то, чтобы трапеза продолжалась вчетверо дольше, количество коров надо во столько же раз уменьшить, и оно становится равным $70 : 4 = 17,5$. При таком ответе сразу вспоминаются знаменитые *полтора землекопа* Виктора Перестукина², но это ещё полбеда. Хуже другое: если опираться на другие данные условия, а именно не на 70 коров, а на 30, слопавших траву за 60 дней, то $96 : 60 = 1,6$, и потому потребное число коров становится равным $30 : 1,6 = 18,75$. В результате возникает мрачное ощущение безысходности, слегка смягчённое надеждой, что условие просто-напросто содержит ошибку, а значит, и браться за такую задачу не имеет смысла.

Между тем ошибок в задаче нет, и более бдительные сразу обратят внимание на первое предложение – о растущей траве. Вот где зарыта собака³ – оказывается, пока коровы едят, трава успевает подрасти, и запас кормов на лугу увеличивается (хотя и не может обеспечить животным бесконечно долгое питание).

Как же решать такую задачу? Возможный подход предлагает сам Я. И. Перельман в той же книге. Пропитируем его рассуждения.

Введём вспомогательное неизвестное, которое будет обозначать суточный прирост травы в долях её запаса на лугу. В одни сутки прирастает y , в 24 дня – $24y$; если общий запас принять за 1, то в течение 24 дней коровы съедают $1 + 24y$. В сутки всё стадо (из 70 коров) съедает $\frac{1 + 24y}{24}$, а одна корова съедает $\frac{1 + 24y}{24 \cdot 70}$.

¹Об этом сообщает Я. И. Перельман в книге «Занимательная алгебра» (Глава II, статья «Коровы на лугу»).

²См. сказочную повесть Л. Б. Гераскиной «В стране невыученных уроков».

³В данном случае верней было бы сказать «зарыта корова».

Подобным же образом из того, что 30 коров поели бы траву того же луга в 60 суток, выводим, что одна корова съедает в сутки $\frac{1+60y}{30 \cdot 60}$. Но количество травы, съедаемое коровой в сутки, для обеих стад одинаково. Поэтому

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+60y}{30 \cdot 60},$$

откуда $y = \frac{1}{480}$. Найдя y (величину прироста), легко уже определить, какую долю первоначального запаса травы съедает одна корова в сутки:

$$\frac{1+24y}{24 \cdot 70} = \frac{1+24 \cdot \frac{1}{480}}{24 \cdot 70} = \frac{1}{1600}.$$

Наконец, составляем уравнение для окончательного решения задачи: если искомое число коров x , то

$$\frac{1+96 \cdot \frac{1}{480}}{96x} = \frac{1}{1600},$$

откуда $x = 20$.

20 коров поели бы всю траву в 96 дней.

Вот и всё решение. Ничего не скажешь – добротно и основательно. Но уж очень громоздко. Пока до конца дочитаешь – уже и начало позабудешь. Нельзя ли как-нибудь короче?

Можно. И главной опорой в этом послужат не герои сюжета – коровы, а... сам автор задачи! Исаак Ньютон был не только гениальным математиком, но и не менее гениальным физиком (законы Ньютона говорят сами за себя!). Великий учёный поставил на строгие математические рельсы принцип относительности движения и умело его использовал в решении многих проблем. Так давайте и мы так переформулируем задачу, чтобы на передний план вышла её физическая сущность. Для этого заменим луг с коровами рекой с катером. И вот что у нас выходит.

Назовём собственной скоростью катера его скорость при движении в стоячей воде. Если катер поплывёт вверх по течению реки с собственной скоростью 70 км/ч, то он доберётся до пункта назначения за 24 часа, а если он поплывёт с собственной скоростью 30 км/ч, то





он доберётся до пункта назначения за 60 часов. С какой собственной скоростью ему надо плыть, чтобы достичь цели за 96 часов?

Здесь количество коров преобразовалось в скорость катера, а растущая трава – во встречное течение (правда, сами числовые значения получаются далёкими от реальных, но кого это волнует?). Далее, не слишком отклоняясь от Перельмана, обозначим собственную скорость катера через x , а скорость течения через y . Тогда одно и то же расстояние, которое проплыл (бы) катер, можно записать тремя способами, что порождает вот такую систему уравнений:

$$(70 - y) \cdot 24 = (30 - y) \cdot 60 = (x - y) \cdot 96.$$

Решается она проще пареной репы, а главное – проста и наглядна. Ответ, естественно, совпадает с тем, что был получен ранее: $x = 20$ (значение же y нас вообще-то не интересует, но если любопытствовать и вычислить его, оно оказывается равным $3\frac{1}{3}$. Сами сообразите, почему оно не совпадает с вычисленным ранее значением $\frac{1}{480}$)⁴.

Как видим, знаменитое театральное восклицание: «Автора!» можно с успехом применять при решении математических задач. Чего и нашим читателям желаем. А в заключение, чтобы убедиться, что описанный приём освоен прочно и надёжно, попробуйте решить другую, более сложную задачу, приведённую Перельманом в той же «Занимательной алгебре»:

Три луга, покрытые травой одинаковой густоты и скорости роста, имеют площади: $3\frac{1}{3}$ га, 10 га и 24 га. Первый прокормил 12 быков в продолжение 4 недель; второй – 21 быка в течение 9 недель. Сколько быков может прокормить третий луг в течение 18 недель?

Как и следовало ожидать, решение, приведённое в книге Перельмана, заняло без малого две страницы текста (не будем его даже приводить). Но вы, конечно, обойдётесь меньшими затратами. Вперёд!

⁴А тому, кто всё-таки не сообразил, подскажем: значение $\frac{1}{480}$ появляется при обозначении всего пути (либо же его эквивалента – исходного запаса травы на лугу) через единицу, как это сделал Перельман. Мы же обошлись без этого и даже вообще длину пути не вычисляли – зачем нам лишняя работа? Между прочим, скорость течения реки, равная $3\frac{1}{3}$, свидетельствует о том, что будь скорость катера не больше этой величины – и он никогда не доберётся до пункта назначения. В переводе на коровий язык это означает: если коров не больше $3\frac{1}{3}$, то они могут сколько угодно долго питаться на лугу, в противном случае продовольственный кризис неизбежен.





ЗЕРКАЛЬНЫЕ НЕЙРОНЫ

Посмотрите на папу, попросите его смотреть вам в лицо и начните сладко зевать. Не обязательно зевать по-настоящему. Можно просто начать приговаривать «зевать, зевать, зевать». Эффект будет одинаков: папа тоже зазевает. Почему так происходит? Учёные бы долго ломали голову над этим вопросом, если бы в 1996 году с итальянским учёным Джакомо Ризолатти не произошёл очень занятный случай.

Джакомо исследовал мозг подопытной макаки: он искал такие клетки мозга (нейроны), которые активируются, когда обезьяна ест изюм. Поиски затянулись до вечера. Наконец эти нейроны были обнаружены. Они давали электрические сигналы всякий раз, когда макака подносила изюм ко рту. Время было позднее, Джакомо был усталым, голодным и решил сам съесть пару изюминок. Он взял изюминку и поднёс её к своим губам на глазах у макаки. Вдруг её нейроны дали очень мощный электрический

ответ. Они активировались, как если бы это сама макака ела изюм.

Джакомо понял, что нашёл такие особые клетки, которые сигнализируют в двух случаях: 1) когда сама макака ест изюм, и 2) когда она видит, как кто-то другой ест её изюм. Он назвал эти клетки *зеркальными нейронами*, потому что они как бы «отражают» чужое поведение у нас в голове. Позже зеркальные нейроны были найдены у других обезьян, у некоторых птиц и, конечно, у людей. Но зачем же нужны эти странные клетки?

Французские учёные решили ответить на этот вопрос. Они поделили испытуемых на две группы. У первой группы вызывали настоящие эмоции при помощи разных запахов (приятных и гадких). При этом фотографировали их. А испытуемым второй группы показывали только фотографии лиц первой группы (без запахов). Что же оказалось? У испытуемых второй группы активировались те же зоны в мозге, что и у испытуемых

ОГЯНИСЬ ВОКРУГ



первой группы. Иными словами, если человек видел фотографию счастливого человека, его мозг «радовался», а если люди видели «кислую мину», то сами чувствовали отвращение.

Поэтому если нас окружают умные и счастливые люди, мы сами тоже будем становиться счастливее и умнее. А если с нами рядом злые, ворчливые, грубые люди, наш характер может здорово испортиться.

Зеркальные нейроны помогают нам определять не только эмоции других людей. Вот как Ризолатти объясняет своё открытие: «Представим, что человек напротив нас подносит ко рту стакан с водой. Как наш мозг понимает, что он делает? Мозг мог бы сопоставить образы человека и стакана с тем, что хранится в памяти, подумать, вспомнить законы физики и сделать какое-нибудь предположение. Но оказывается, нашему мозгу гораздо проще понять, что делает другой человек, мысленно повторив его действие. Этим и занимаются

зеркальные нейроны». Получается, что зеркальные нейроны позволяют нам прочувствовать то, что происходит с другими, так, как будто бы мы совершали это действие сами. Поэтому нам так нравится смотреть фильмы, спортивные передачи, балет. Всякий раз, когда мы смотрим кино, какая-то часть мозга заставляет нас чувствовать, что это мы только что 10 раз повернулись на пуантах, это мы прибежали к финишу первыми, это мы победили злодея и спасли красавицу от страшной смерти. Учёные установили это следующим образом. Они повесили на людей, которые смотрели телевизор, специальные датчики. Оказалось, что когда люди смотрели забег лыжников, активировались мышцы на их ногах. Когда смотрели бокс – у них напрягались мускулы рук и сжимались кулаки.

Но и это ещё далеко не всё, что могут наши зеркальные нейроны. Оказывается, они помогают нам быстро обучаться чему-нибудь новому, даже



если мы ещё ничего не понимаем. Ведь учиться путём проб и ошибок очень долго и иногда даже опасно. А благодаря зеркальным нейронам нам очень просто подражать: мы это делаем, не задумываясь, как бы автоматически. Поэтому дети обожают повторять за кем-нибудь большим и умным (например, за папой). Можно повторять друг за дружкой. Например, если Петька Иванов вдруг начнёт замачивать хлеб в компоте или размазывать пластилин по обоям, к нему тут же радостно присоединятся его товарищи. Не только дети, но и взрослые постоянно подражают друг другу: например, любимым актёрам кино, начальникам.

Конечно, некоторые животные тоже могут подражать (например, говорящие попугаи или человекообразные обезьяны). Но люди это делают чаще и охотнее. Это подтвердил Дерек Лион в своём замечательном эксперименте. Дерек показал, как открывать ящик с конфетами, шимпанзе и маленьким детям (3–5 лет). Кроме

нужных действий, которые приводят к открытию ящика, Дерек совершал кучу «лишних» действий. Потом Дерек оставлял ящик испытуемым, а сам уходил из комнаты и начинал подглядывать. Оказалось, что шимпанзе постепенно переставали делать «лишние» действия и совершали только то, что нужно для получения конфет. А вот человеческие дети с радостью воспроизводили и нужные, и ненужные действия.

Учёные считают, что наша склонность копировать «бессмысленные» действия не так уж бессмысленна в масштабе истории человечества: благодаря этому люди смогли передать опыт далёких предков последующим поколениям. Так стали передаваться от человека к человеку элементы культуры: праздничные песни и танцы, молитвы, мистические ритуалы, полезные навыки. Поэтому получается, что маленькие зеркальные нейроны – это основа нашей великой культуры!

ЧЕТВЁРТЫЙ ПОБЕГ

Разжалованный Джейлер сидел в прокуренной караулке со своим напарником после очередного обхода.

– Бывает же такое, – посетовал Джейлер, – три побега за столь короткий срок. Что может быть хуже?

– Мы хотя бы оперативно реагировали и возвращали беглеца на место, – попытался подсластить пилюлю Смит. – Вот год назад, когда я служил в тюрьме Форрестфорт, у нас тоже сбежал заключённый. Так тогда никакие меры не помогли.

– Как это? – заинтересовался Джейлер.

– Ему удалось ускользнуть во время вечерней прогулки. Отсутствие заключённого очень быстро обнаружили, у него в запасе было не более 15 минут. Мы подняли тревогу и пустились в погоню. Однако никто так и не понял, как заключённому удалось уйти...

– Что ты имеешь в виду? – перебил Джейлер.

– Надо сказать, что тюрьма эта имеет свои особенности. Она расположена в густом лесу в 3 км от реки по единственной дороге, которая пересекает реку под прямым углом, – Смит достал лист бумаги и нарисовал.



– Собаки взяли след, и часть группы двинулась в погоню через лес прямо по тому пути, по которому бежал преступник, – продолжал Смит. – Однако мы знали, что целью заключённого является река. Успей он к реке раньше нас – переберётся на другой берег где-либо ниже по течению, собаки потеряют след, и мы его уже не поймаем. Поэтому мы решили действовать хитро, и основная группа охраны добралась до реки на грузовике. Через 5 минут мы были уже у моста. Здесь охрана продвигалась в лес вдоль реки (влево и вправо от дороги) и выстраивалась цепью, так что не проскользнёшь, поджидая заключённого...

– И почему это должно было сработать? – спросил Джейлер.

– Мы продвигались вдоль реки по лесу со скоростью 3 км/ч, и заключённый никак не мог идти быстрее нас. В то же время первая группа с собаками двигалась через лес чуть быстрее, со скоростью 3,5 км/ч. Значит, если заключённый выйдет из леса к реке далеко от моста, то первая группа успеет его нагнать. Если же недалеко, то он попадёт в руки основной группе..., – Смит тяжело вздохнул.

– Кажется, всё логично, но что же в итоге произошло?

– Вот этого-то мы так и не смогли понять...

Как же удалось ускользнуть заключённому?





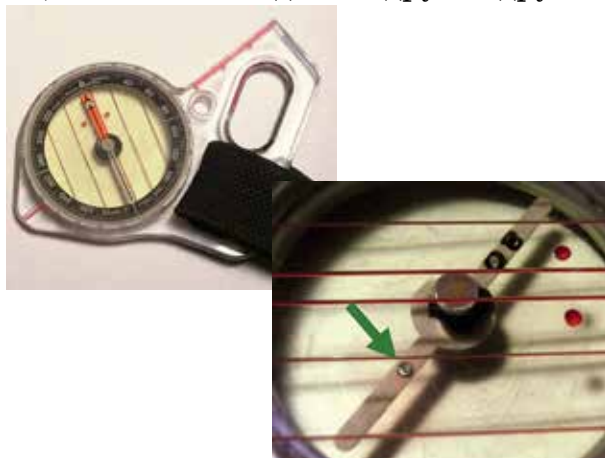
ЧУДЕСА МАГНИТНОЙ СТРЕЛКИ

Я со школы знаю: стрелка компаса – это магнит, у которого есть два полюса, северный и южный. Северный полюс магнитной стрелки смотрит на север, южный – на юг. Ещё я знаю, что магниты притягиваются разноимёнными полюсами («красный к синему») и отталкиваются одноимёнными («красный от красного» и «синий от синего»). Поэтому – как ни удивительно это звучит – южный магнитный полюс расположен вблизи северного географического полюса, а северный – на юге, в Антарктиде. Но это всего лишь названия, люди договорились употреблять слова именно так, а не иначе. А вот этот факт удивил меня по-настоящему.

Я держу в руках жидкостный компас для спортивного ориентирования, изготовленный фирмой «Московский компас». И вижу, что его стрелка изготовлена не из металла, а из тонкой пластмассовой пластинки. Поэтому она не магнитится. Как же тогда эта стрелка показывает на север?

Перевернём компас нижней стороной вверх и посмотрим на стрелку внимательно: снизу к одному из её концов прикреплен маленький металлический

кружочек. Наверное, это и есть её магнитная часть. На одном моём компасе эта штука висит на северном конце стрелки, а на другом – на южном. Я недоумеваю: неужели эта штука притягивается к одному магнитному полюсу Земли и отталкивается от другого полюса? Но ведь такого не бывает, в учебнике физики написано, что северный полюс магнита не существует без южного, и их нельзя отделить друг от друга!



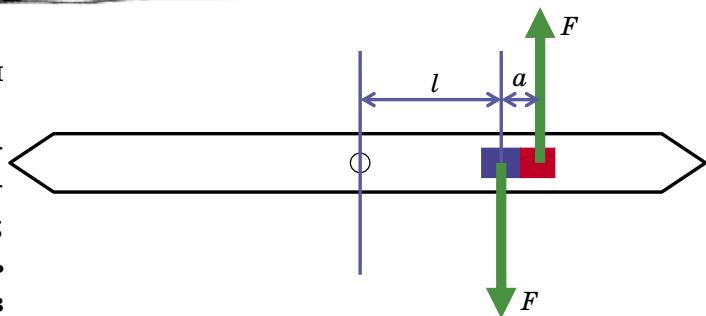
Конечно же, эта маленькая металлическая штучка является полноценным магнитом, у которого есть и северный полюс, и южный. Но как она разворачивает стрелку? Если бы кружочек располагался по центру стрелки, всё





было бы понятно. Но он прикреплён сбоку – как же это работает?

Чтобы ответить на этот вопрос, нарисуем длинную стрелку с прикрепленным к ней маленьким магнитом; полюсы магнита ориентированы вдоль стрелки. Пусть стрелка повернута не в направлении «север-юг», а перпендикулярно к нему. Тогда на оба полюса стрелки действуют равные силы, и одна из них направлена на юг, а другая на север. Хотя эти силы и равные, сильнее раскручивает стрелку та сила, которая приложена к большему плечу. К примеру, открывать дверь, толкая её около петель намного тяжелее, чем толкая за ручку. А ещё, оказывается, вращающее действие магнита не зависит от расстояния до оси компаса. Чтобы это понять, воспользуемся правилом моментов. Одна сила приложена к плечу l , и она создаёт момент Fl . Другая сила приложена к плечу $l + a$, и она создаёт момент $F(l + a)$, который крутит стрелку в противоположном направлении. А разность этих моментов равна $F(l + a) - Fl = Fa$. Именно этот момент Fa и разворачивает стрелку. Его величина не зависит от расстояния l .



Кстати, есть ещё один вопрос: как они сумели прикрепить такой маленький магнитик к стрелке так, чтобы его магнитные полюсы смотрели в точности вдоль стрелки, а не под углом к ней? Если подумать немного, это не трудно понять: изготовители сначала прикрепили к стрелке немагнитный кружок, а потом поместили стрелку внутрь проволочной катушки по её оси, включили электрический ток, и внутри катушки возникло сильное магнитное поле, которое и намагнитило стрелку. Когда ток отключили, намагнитченность осталась. Материал, из которого изготовлен кружок, – это специальный сплав неодима, бора и железа. Неодимовые магниты очень сильно намагничиваются и обладают высокой стойкостью к размагничиванию, так что мой компас будет служить мне ещё много лет.

Художник Артём Костюкевич



Почему пчёлы общественные, а бабочки нет?

Мы все прекрасно знаем, что пчёлы и муравьи – общественные насекомые. Они живут большими семьями, состоящими из размножающейся матки, или «царицы» (у некоторых видов муравьёв маток несколько или много) и множества рабочих, которые размножаться не способны, но зато выполняют все полезные работы: от добычи пищи до ухода за личинками.

Знаем мы и то, что предки общественных насекомых были одиночными и постепенно в процессе эволюции выработали такие сложные общества. До сих пор в отряде перепончатокрылых, к которому относятся осы, пчёлы, шмели и муравьи, есть множество переходных форм от одиночных насекомых к общественным.

На начальном этапе молодые пчёлы из первого выводка помогают матери вырастить следующий, а затем разлетаются кто куда и строят собственные гнёзда. А в дальнейшем помощницы перестают разлетаться и до конца жизни помогают матери, не откладывая яиц.

Как же в процессе эволюции насекомые «перескочили» на этот этап? Ведь на первый взгляд такой переход полностью противоречит теории естественного отбора. Напомним вкратце её суть: если гены какой-то особи обеспечивают развитие у неё полезных признаков, то у неё будет много потомков, и в следующем поколении окажется много носителей этих «полезных» генов. Они снова оставят много потомков, и снова, и снова. Если же гены кодируют какие-то невыгодные признаки, то потомков у такой особи будет мало, и с каждым поколением доля этих генов будет уменьшаться, пока они вовсе не исчезнут. Новые варианты генов появляются за счёт мутаций, а естественный отбор определяет, какие из них полезны и достойны существования, а какие вредны, и им суждено исчезнуть.

Однако, допустим, у какой-то пчелы в результате мутации появился ген альтруизма – стремление помогать маме в уходе за личинками. Причём так помогать, что даже «забыть» про собственное размножение. Это замечательно: мама благодаря помощи старшей дочери вырастит много молодых пчёл. Вот только наша мутантная помощница свои гены потомкам не пере-



даст – эти гены умрут вместе с нею. Эволюция общественных насекомых закончится, не успев начаться.

Что же, теория Дарвина неверна? Не спешите, – отвечают учёные-эволюционисты, – не забывайте, что молодые пчёлы, которых вырастит наша мутантка-альтруистка, – её родные сёстры. Может быть, хоть у некоторых из них тоже есть этот ген альтруизма? И помощница, даже не оставляя собственного потомства, продлит свои гены? Так-то оно так, но носительницы «гена эгоизма» оставят больше потомков, чем носительницы «гена альтруизма». Да и вообще: сёстры то ли несут в себе эти гены, то ли не несут, а собственные потомки уж точно твои гены унаследуют.

В случае с «нормальными» животными всё именно так. Потому-то у большинства общественных животных и нет деления на плодовитых маток и бесплодных рабочих. В стае обезьян, к примеру, размножаются все особи. Как и в колонии чаек.

Но перепончатокрылые – не такие, как все. У них совсем иначе происходит определение пола. Как известно, у млекопитающих пол задаётся двумя половыми хромосомами: X и Y. Если ребёнку досталась X-хромосома от мамы и Y-хромосома от папы, он будет мальчиком. Если две X-хромосомы – девочкой. Две Y-хромосомы достаться ему не могут, потому что у мамы такой хромосомы нет, обе её хромосомы – X (рис. 1).

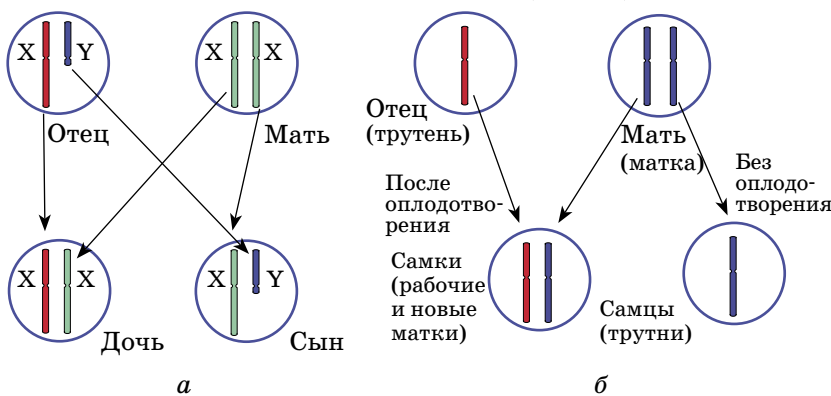


Рис. 1. Схема наследования пола у человека (а) и у пчёл (б)

А у перепончатокрылых пол определяется... числом хромосом. У самок (и рабочих, которые представляют собой бесплодных самок) – двойной набор, хромосома каждого типа представлена в двух экземплярах. А у самца – одинарный, по одной хромосоме





каждого типа. Если самка откладывает оплодотворённые яйца, в них объединяются один набор от матери и один от отца – получаются самки с двойным набором. А если самцов нет, самка откладывает неоплодотворённые яйца с одинарным набором хромосом – и самцы появляются! Очень удобно.

Как это связано с переходом к общественному образу жизни? А вот как. Давайте посмотрим, насколько родственны друг другу родители–дети и братья–сёстры у нас, млекопитающих, и у пчёл. У человека ребёнок получает половину хромосом матери и половину – отца (рис. 2). Значит, с каждым из родителей у него половина общих генов. С сёстрами–братьями дело сложнее. Теоретически одна сестра (или брат, сейчас это не важно) может получить от мамы одну половину хромосом (условно назовём их «левыми»), потому что на схеме они нарисованы слева), а вторая – другую («правые»). Тогда у сестёр (или братьев) совсем не окажется одинаковых материнских генов. С другой стороны, возможно и такое, что обеим сёстрам достанутся одни и те же «левые» или «правые» хромосомы, тогда их гены будут полностью идентичны.

В реальности вероятность таких крайних вариантов очень мала – хромосомы распределяются между потомками случайно. И в среднем у двух братьев–сестёр совпадает примерно четверть материнских генов. И примерно четверть отцовских. В сумме – половина. Итак, и родители с детьми, и братья с сёстрами у млекопитающих имеют в среднем половину общих генов.

А как у перепончатокрылых (рис. 3)? От мамы – та же общая четверть (в среднем), а от папы – все сто процентов! У него просто нет других вариантов: каждая его хромосома представлена в одном экземпляре. Получается, что родители и дети у пчёл имеют половину общих генов, а сёстры – три четверти! Они друг другу роднее, чем матери. Правда, с братьями у пчёл-самок всего четверть общих генов. Но в любой пчелиной семье преоб-

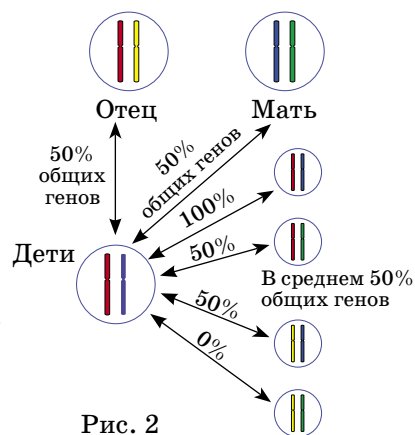


Рис. 2

ладают самки, а самцы появляются редко и в небольшом количестве – их можно не учитывать.

В итоге выходит так, что с точки зрения продления своих генов пчеле «выгоднее» вырастить побольше сестёр, чем дочерей. А если сестёр вырастить очень много,

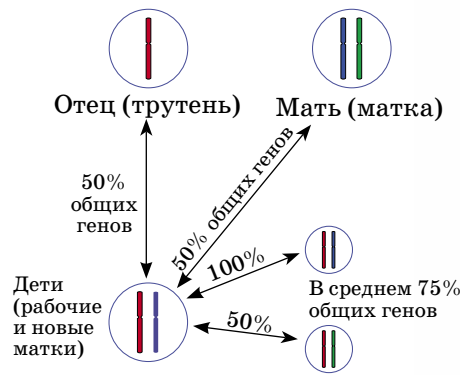


Рис. 3

дочерей уже и вовсе нет нужды заводить. Именно так рабочие пчёлы (а также осы, шмели и муравьи) и поступают.

Разумеется, пчёлы не думали о «выгоде» и генах. Просто, если какая-то особь несла в себе ген «альтруизма», то этот ген не пропадал, вопреки ожиданиям, а, наоборот, с каждым поколением всё больше распространялся в популяции.

Как видите, теория Дарвина верна и для общественных пчёл. Более того, она может объяснить, почему среди перепончатокрылых так много общественных насекомых, а среди, скажем, бабочек – ни одного. Потому что у тех пол наследуется, как у млекопитающих: с помощью двух половых хромосом.

Задача 1. Все муравьи считаются общественными насекомыми. Но у некоторых видов отсутствует каста рабочих – есть только солдаты, не способные ни ухаживать за личинками, ни добывать пищу, ни даже есть самостоятельно. Таковы, например, тропические муравьи-амазонки. Как же они выживают?

Подсказка: рабочие муравьи хранят верность «своему» гнезду, отличая по запаху членов своей семьи (других рабочих, солдат, маток и т.п.) от чужаков. Но «своим» они считают тот муравейник, в котором вышли из куколки: грубо говоря, тот, чей запах впервые ощутили в момент вылупления.

Задача 2. Кроме муравьёв, у которых осталась только каста солдат, есть и такие виды, у которых в процессе эволюции вообще исчезли бесплодные особи – остались только самцы и матки. При этом они, как и матки обычных видов муравьёв, неспособны даже полноценно обслуживать сами себя, не то что выкормить личинок. Как выживают такие виды?

Подсказка: как бы хорошо ни работала у муравьёв запаховая система распознавания «свой-чужой», её, как и любую другую охранную систему, можно обмануть...

Художник Инга Коржнева

ПАТТЕРН-ГОЛОВОЛОМКА

Прежде чем перейти к головоломке, решим простую задачку. Изготовим три плоские фигурки (рис. 1), каждая из которых составлена из четырёх единичных квадратов (так называемые тетрамино). Суммарная их площадь $4 \cdot 3 = 12$. Возьмём прямоугольник 6×4 в два раза большей площади (рис. 2). Задача: разместить эти фигурки в прямоугольнике так, чтобы каждая пустая область совпадала бы с одной из фигурок. Решение этой задачи показано на рисунке 3.



Рис. 1

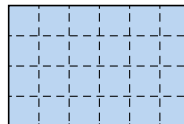


Рис. 2

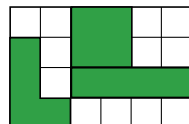


Рис. 3

Степень её сложности можно оценить в 1 балл по 7-балльной шкале (1 балл – очень лёгкая задача, 7 – очень трудная).

А теперь попробуйте решить аналогичную задачу со следующим набором фигурок полимино (рис. 4) на поле 6×9 (рис. 5). Разместите фигурки на поле так, чтобы каждая пустая область совпадала бы с одной из фигурок. Понятно, что фигурки можно как угодно поворачивать и переворачивать, но нельзя накладывать друг на друга. Пустые области должны быть изолированы друг от друга, они могут соприкасаться друг с другом углами, но не сторонами образующих квадратов.



Рис. 4

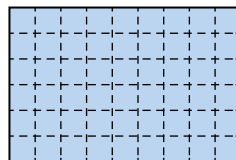


Рис. 5

Автору головоломки (В. Красноухов) известно единственное решение. А вот с определением степени сложности возникла проблема. Многие из тех, кто видел решение, оценивают эту головоломку как очень простую. Впрочем, как остроумно заметил Олег Полубасов, «все задачи простенькие, если знаешь решение». Попробуйте оценить эту головоломку самостоятельно. Желаем успехов!

P.S. Когда эта статья уже готовилась к печати, в Москве состоялся XIX Очный открытый чемпионат России по решению головоломок. Финал этих соревнования проходил 4 июня 2016 в офисе Яндекса. Среди задач механического тура финалисты решали и головоломку «паттерн». За отведённые 10 минут с головоломкой справились 8 участников из 28. Приятная неожиданность: Алексей Лаптиев из Москвы нашёл решение, отличное от авторского!



С Л О В О Б У С Ы

Андрей, Матвей и Тимофей раздобыли квадратные бусины и теперь, сидя за столом, старательно выводят на них какие-то буквы. Входит Катя и интересуется:

– Чего это вы, мальчики, бусы собираете?

– Это никакие не бусы! – буркнул Андрей, – это научные модели. Машины, можно сказать.

– Но они же из бусинок с буквами, – удивилась Катя, – какие-то слово-бусы.

– Правильно называть не «словобусы», а «словобусы», как «автобусы», – пояснил Тимофей, – тебе же сказали, что это машины.



– Я с вами хочу!

– Хорошо, – разрешил Матвей как самый старший, – но для этого тебе нужны бумага и ручка.

– Нет, я с бусинками хочу! – потребовала Катя.

– Будут тебе и бусинки, но сначала послушай меня. Возьми лист и напиши на нём без ошибок четыре слова с одинаковым количеством букв. Лучше писать в клеточках, одно под другим, чтобы не запутаться.

Катя хотела, чтобы ей поскорее дали бусины, поэтому, особенно не задумываясь, она написала:

К	Ц	Т
К	О	Т
П	Ё	С
С	О	М



Чудеса ЛИНГВИСТИКИ

– Готово? – спросил Матвей, не отрываясь от своей работы. – Теперь бери столько бусин, сколько букв в одном твоём слове.

– Всего три? – огорчилась Катя.

– Пока да. Надевай их на шнурок и завязывай каждый конец так, чтобы кубики можно было свободно поворачивать, но при этом чтобы они не ездили по всему шнуру. Если узла недостаточно, можно закрепить с каждой стороны маленькой круглой бусиной.

– Я тогда поплотнее завяжу, – сказала Катя, принимаясь за дело.

– Теперь бери перманентный фломастер, которым можно писать на блестящей поверхности, и очень внимательно переноси на бусины слово за словом, горизонтально. Написала одно слово – переверни каждый кубик в одну сторону. Так нужно поворачивать три раза, пока сверху не покажется твоё первое слово.

Катя очень старалась не пропустить ни одной буквы при переписывании, и ей это удалось.

– Вот и готов словобус! – радостно сказала она, размахивая шнурком, – а что теперь с ним делать?

– Теперь самое интересное, – объявил Андрей, – попробуй, поворачивая кубики, прочитай на твоём словобусе новые слова. Читать нужно по горизонтали, слева направо.

Катя с азартом принялась крутить бусины, почти как кубик Рубика, чтобы собрать какое-нибудь новое слово. Но слова почему-то плохо составлялись.

– А можно, чтобы слово было короче трёх букв? – спросила Катя.

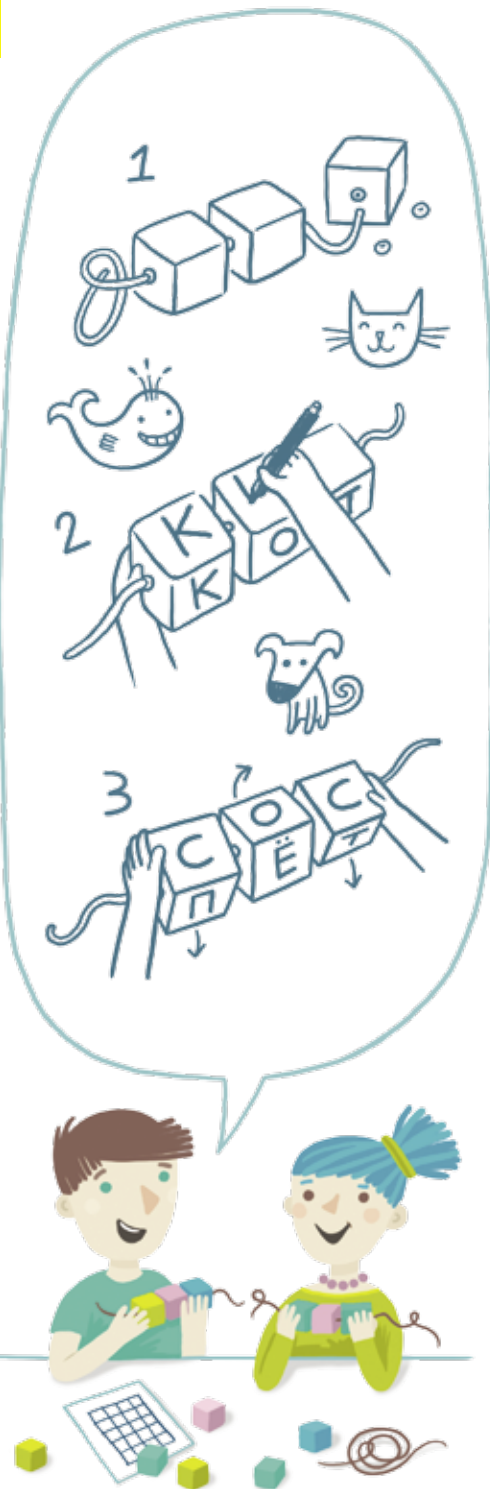
– Да, конечно, – ответили мальчики.

– Я могу составить слово «ем». И вот ещё «сос».

– Действительно, сос, – усмехнулся Матвей, – цель словобуса в том, чтобы собрать как можно больше новых слов. С самого начала нужно подбирать слова не просто с распространёнными буквами. Но ещё и так, чтобы буквы почти не повторялись одна под другой и могли хорошо сочетаться. Поэтому мы и пишем на бумажке с самого начала.

– А я вижу ещё слова на Катином словобусе! – сказал Андрей.

– Но ты же смотришь на лист бумаги, а не на бусины, – не поверила Катя.



– Да, – гордо сказал Андрей, – я по записи могу увидеть, какой будет словобус. Для этого я беру по букве из каждой колонки и складываю их в уме.

Какие слова мог найти Андрей?

– Не нравится мне этот словобус, – огорчённо сказала Катя.

– Давай составим другой, – предложил Матвей, – бери ручку.

Ребята вместе придумали словобус из слов по четыре буквы. У них получилась такая запись:

Ж	А	Р	А
К	И	Н	О
П	О	Н	И
И	З	Ю	М

Катя была особенно довольна тем, что ей удалось использовать слова, обозначающие её любимые вещи. Когда словобус надели на шнурок, Катя бросилась составлять новые слова. Хотя хитрый Андрей уже увидел 10 слов, пока они надевали бусины.

Как вы думаете, какие это могут быть слова?

– Хороший словобус, – одобрил Тимофей, – хотя у него есть недостатки.

– Какие же это недостатки? – обиделась Катя.

– Ну, почти у всех словобусов подлиннее есть недостатки, – примирительно сказал Тимофей, – вот у тебя из-за слов «изюм» и «кино» две «и» рядом могут оказаться, а такого не бывает в начале слов в русском языке.

– Я так люблю изюм, – гордо сказала Катя, – что ради него можно и потерять парочку слов.

Какие ещё недостатки можно увидеть в Катинном новом словобусе?

– Знаете что, – сказал Матвей, – давайте каждый соберёт по словобусу из шести букв – и устроим чемпионат. Будем составлять и называть слова по очереди, у кого больше получится – тот и победил!

Попробуйте придумать свой словобус. Если нет квадратных бусин, можно склеить кубики из плотной бумаги и проткнуть их иглой с ниткой. На бумажных кубиках можно даже писать карандашом, а затем стирать, чтобы совершенствовать словобус.



Художник Настасья Худякова

■ НАШ КОНКУРС («Квантик» № 6)

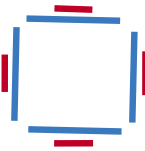
26. За круглым столом сидят десять человек: рыцари и лжецы (и те, и другие присутствуют). Рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут. Каждого спросили, кто сидит справа от него – рыцарь или лжец. Могло ли число ответов «справа от меня сидит лжец» равняться а) двум; б) одному?

а) **Ответ:** может. Например, если за столом сидит 9 рыцарей и 1 лжец.

б) **Ответ:** не может. Так как присутствуют и лжецы, и рыцари, то найдётся рыцарь, справа от которого сидит лжец, а также лжец, справа от которого сидит рыцарь. Оба они ответят, что справа от них сидит лжец, поэтому таких ответов никак не меньше 2.

27. Ноутник нарисовал на плоскости несколько отрезков, которые не пересекаются друг с другом. Всегда ли Квантик сможет соединить некоторые из их концов другими отрезками так, чтобы получилась одна несамопересекающаяся ломаная?

Ответ: не всегда. Пусть отрезки проведены, как на рисунке. Посмотрим на верхний красный отрезок. Его концы можно соединить только с концами соседнего синего отрезка. Но если соединить оба конца красного отрезка с концами синего, то получим замкнутый кусок, и построить ломаную не удастся. Значит, один из концов красного отрезка ни с чем не соединён. Такое возможно только если эта точка – один из двух концов ломаной. Но то же самое верно и для любого другого красного отрезка. А у ломаной не может быть четырёх концов. Значит, построить ломаную нельзя.



28. Найдите какие-нибудь два различных натуральных числа, больших пяти, которые и в сумме, и в произведении дают число-палиндром. (Напомним, что число называется палиндромом, если цифры в нём идут слева направо в том же порядке, что и справа налево, например: 717, 55, 3223.)

Ответ: 11 и 22. Есть и другие варианты, например: 18 и 37, 102 и 201, ...

29. Если одну из сторон квадрата уменьшить на 4 см, а вторую увеличить на 5 см, площадь получившегося прямоугольника станет меньше площади квадрата. Уменьшится

или увеличится площадь, если одну из сторон этого квадрата уменьшить на 1 см, а вторую увеличить на 2 см?

Ответ: площадь увеличится. Пусть длина стороны квадрата x см, тогда его площадь x^2 см². Стороны второго прямоугольника равны $x - 1$ см и $x + 2$ см, его площадь $-(x - 1)(x + 2)$ см². Вычтем из площади прямоугольника площадь квадрата: $(x - 1)(x + 2) - x^2 = x - 2$. Так как сторону квадрата можно уменьшить на 4 см, то $x > 4$. Значит, $x - 2 > 2 > 0$, и площадь прямоугольника больше площади квадрата.

Упражнение: приведите пример квадрата, для которого выполняются условия этой задачи.

30. а) Двенадцать ребят решили сыграть в волейбол. На каждую игру тренер разбивает их на две команды по 6 человек. Он хочет провести несколько игр, чтобы в итоге каждый сыграл с каждым в одной команде. Какое наименьшее число игр потребуется?

б) Тут прибежало ещё 10 человек, и ребята решили сыграть в футбол. Теперь тренер разбивает их на две команды по 11 человек и снова хочет провести несколько игр, чтобы в итоге каждый сыграл с каждым в одной футбольной команде. Какое наименьшее число игр потребуется?

а) **Ответ:** потребуется 3 игры. Возьмём игрока Васю. Всего ребят кроме него 11, и с каждым он должен сыграть в одной команде. Каждую игру он играет в одной команде с пятью другими ребятами. Значит, за две игры он сыграет только с 10 ребятами, и нужна будет третья игра.

Трёх игр хватит. Разобьём ребят на 4 группы по 3 игрока каждая и назовём группы A, B, C, D . Пусть в первой игре группы A и B играют против C и D , во второй игре – A и C против B и D , в третьей – A и D против B и C . Тогда каждый сыграет с каждым.

б) **Ответ:** потребуется 4 игры.

Предположим, что трёх игр хватит. Тогда пусть в первую игру игроки разбились на команды A и B , а во вторую – на команды 1 и 2. Нарисуем табличку 2×2 и расставим в неё школьников. В первый столбец поставим команду A : в первой клетке – тех, кто потом играл в команде 1, а во второй клетке – тех, кто потом играл в команде 2. Аналогично поставим во второй столбец команду B .

Теперь у нас столбцы соответствуют командам A и B , а строки – командам 1 и 2. Значит, число детей в каждом столбце и в каждой строке равно 11. Пусть в верхней левой клетке стоит x человек. Тогда в соседних с ней клетках должно быть по $11 - x$ человек, а в оставшейся клетке – снова x человек.

	A	B
1	x	$11 - x$
2	$11 - x$	x

Посмотрим, как должна проходить третья игра, чтобы каждый сыграл с каждым. Ясно, что есть только одна возможность: все дети из двух противоположных клеток обязаны быть в одной команде, и все дети из двух других противоположных клеток тоже должны быть в одной команде. Получаются две команды: в одной $2x$ человек, а в другой $22 - 2x$. Оба эти числа чётные, а должны равняться по 11 – противоречие. Значит, трёх игр не хватит.

Четырёх игр хватит. Разобьём ребят на пять групп A, B, C, D, E , так что в первой группе 6 человек, в группах B, C, D по 5 человек, а в группе E всего 1 человек. Пусть в первой игре A и B играют против C, D, E . Во второй – A и C против B, D и E . В третьей – A и D против B, C, E . Теперь в одной команде не играли только A и E – добавляем к ним любых четырёх человек и получившуюся команду ставим против оставшихся.

■ ВЕСЫ НА ВЕСАХ («Квантик» № 7)

Ответ: наибольшее N равно 7.

Решение основывается на той же идее: неисправные весы *легче* исправных. Покажем, как действовать при $N = 7$. Сначала покажем, как за одно взвешивание можно определить четверо исправных весов. Пронумеруем весы номерами от 1 до 7. На левую чашку весов 1 поставим весы 2 и 3, на правую – весы 4 и 5 (весы 6 и 7 в первом взвешивании не участвуют).

а) Если равновесие, то либо весы 1 сами неисправны (ведь неисправные весы могут показывать что угодно), либо весы 1 исправны и все весы, находящиеся на чашках весов 1, также исправны (иначе мы бы увидели, что чаша с неисправными весами легче). В любом случае, весы 2, 3, 4 и 5 исправны, а неисправные среди трёх остальных.

б) Если одна чаша перевесила, то, опять же, либо весы 1 сами неисправны (как и при равно-

весии), либо, если весы 1 исправны, неисправные весы на более лёгкой чаше. Поэтому весы на более тяжёлой чаше, а также весы 6 и 7 исправны, а неисправные среди трёх остальных.

Итак, мы нашли четверо исправных весов. Осталось выделить неисправные среди оставшихся трёх. Выбираем любые исправные весы, на одну их чашку ставим одни «подозрительные» весы, на другую – вторые, а третьи не трогаем. Тогда весы, оказавшиеся при втором взвешивании на более лёгкой чашке, и будут неисправными, а если получится равновесие, то неисправны весы, не участвовавшие во взвешивании. Всё!

Таким образом, всегда можно выделить за 2 взвешивания неисправные весы среди семи весов! Но это ещё не всё – надо доказать, что если весов не меньше 8, то не удастся гарантированно выделить неисправные весы за 2 взвешивания. Для начала покажем, что как бы мы ни расставили весы в первом взвешивании, в некотором исходе найдутся как минимум четверо весов, которые могут быть неисправными. Мы не будем рассматривать случаи, когда на чаши весов поставлено не поровну весов: ведь если сломанные весы лишь незначительно отличаются по весу от настоящих, то перевешивать всегда будет чаша с большим числом весов и мы ничего не узнаем.

а) Пусть на каждую чашу весов поставили двое или одни весы. Тогда во взвешивании не участвует как минимум трое весов. Если получилось равновесие, то неисправными могут оказаться взвешивающие весы, а могут и любые весы, не участвующие во взвешивании. Всего не менее четырёх «подозрительных» весов.

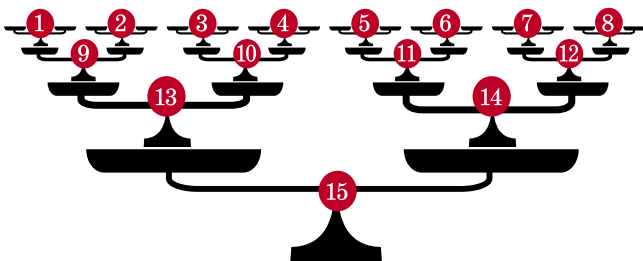
б) Пусть на каждую чашу весов поставили не менее трёх весов. Если при этом одна чашка перевесит, то неисправными могут быть любые весы на лёгкой чаше, а также сами весы, на которых производилось взвешивание, то есть также не менее $3 + 1 = 4$ весов.

Итак, после первого взвешивания всегда может оказаться, что осталось не менее четырёх весов, каждые из которых могут быть неисправны. Можно ли гарантированно выделить неисправные весы за одно оставшееся взвешивание? Легко видеть, что нет. В самом деле, возможны 3 исхода второго взвешивания (или

левая чашка перевесила, или правая, или равновесие), а возможных неисправных весов – 4. Понятно, что какому-то исходу второго взвешивания будут соответствовать не менее двух возможных неисправных весов, и различить их никак нельзя.

Замечание 1. Можно поставить и более общую задачу: каково наибольшее количество весов, среди которых требуется выявить одни неисправные, если разрешено произвести m взвешиваний? Ответ, по-видимому, такой: это значение равно $3^m - 2$ (в решённой нами задаче $m = 2$, и $3^2 - 2 = 7$). При этом первое взвешивание таково: на каждую чашу любых выбранных весов кладём по $3^{m-1} - 1$ весов, и ещё столько же весов во взвешивании не участвуют. Это позволяет при любом исходе первого взвешивания выделить ровно 3^{m-1} весов, которые могут быть неисправны, а также определить заведомо исправные весы (все остальные). Далее, имея исправные весы, можно за $m - 1$ взвешиваний определить неисправные весы из 3^{m-1} подозрительных. Схему взвешиваний читатель, думается, без труда разработает сам.

Замечание 2. А что, если разрешить ставить любое количество весов на любую чашу любых весов (то есть разрешать «весы на весах на весах» и так далее), и одним «взвешиванием» считать показания всех весов составленной нами конструкции? Оказывается, тогда наибольшего N не существует – например, для любого количества весов, на 1 меньше степени двойки, можно выявить неисправные весы за два «взвешивания». Пример нужной конструкции для первого «взвешивания» при $N = 15$ изображён на рисунке.



■ ПИРАМИДКА ИЗ КУБИКА («Квантик» № 7)

Указание: попробуйте сложить пирамидку так, чтобы в каждой вершине пирамидки оказалась пара противоположных вершин куба.

■ ЛЕГЕНДЫ САНКТ-ПЕТЕРБУРГА

• Ребята выяснили, что масса 1 м^3 воздуха при нормальных условиях составляет приблизительно 1,25 кг. Пусть размеры класса такие: длина 10 м, ширина 5 м, высота 3 м. Объём класса получается $10\text{ м} \times 5\text{ м} \times 3\text{ м} = 150\text{ м}^3$. Масса воздуха в классе от 150 до 200 кг. Для оценки этого достаточно.

• В 1876 году вышел роман Марка Твена «Приключения Тома Сойера». Том родился в маленьком городке Сент-Питерсберг, штат Миссури. В романе ему 12 лет. Некоторые расхождения в названиях городов объясняются особенностями произношения в США и России.

• Подозрение пало на Петрова. У него в паспорте написано: год рождения 1987, место рождения – Санкт-Петербург. Но с 26 января 1924 года по 6 сентября 1991 года город назывался Ленинград. Мошенник не учёл этого, когда изготавливал себе фальшивый паспорт.

■ КОРОВЫ ИСААКА НЬЮТОНА

Здесь имеются три разных луга, поэтому при переходе к «водяному» эквиваленту нам придётся иметь дело с тремя катерами на трёх разных реках. Как и ранее, количество коров на третьем лугу (оно же – скорость третьего катера) обозначим через x . Теперь следует заметить, что как скорости роста травы на лугах, так и первоначальные её запасы пропорциональны площадям лугов. В «кинематическом» эквиваленте это значит: скорости течения рек равны y , $10y$ и $24y$ соответственно, а расстояния, которые должны проплыть катера, равны z , $10z$ и $24z$ (где y и z – некоторые пока неизвестные величины). А далее составляем систему из трёх уравнений с тремя неизвестными:

$$(12 - 3\frac{1}{3}y) \cdot 4 = 3\frac{1}{3}z$$

$$(21 - 10y) \cdot 9 = 10z$$

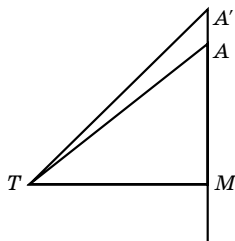
$$(x - 24y) \cdot 18 = 24z$$

Искомое значение x , которое нас интересует, фигурирует только в последнем уравнении, поэтому без предварительного вычисления y и z обойтись затруднительно. Поэтому проще всего поделить первое уравнение на второе (или наоборот) – и z сократится, что позволит нам найти $y = \frac{9}{10}$. Далее, подставив это значение в первое либо второе уравнение, находим $z = \frac{54}{5}$. Нако-

нец, подставив оба найденных значения в последнее уравнение, определяем $x = 36$. Итак, третий луг способен прокормить 36 быков в течение 18 недель.

■ ЧЕТВЁРТЫЙ ПОБЕГ

Пусть T – тюрьма, M – мост, A – точка на берегу на расстоянии 4 км от моста (см. рисунок). Чтобы сбежать, заключённому достаточно бежать со скоростью 3 км/ч к точке A' чуть выше точки A . Проверим это.



Куда бы ни побежал заключённый, пройдёт ровно 105 минут, прежде чем первая группа преследователей его догонит. Действительно, когда охрана пускалась в погоню, беглец уже 15 минут был в пути, а значит, пробежал $\frac{3}{4}$ км. Отставание $\frac{3}{4}$ км сократится до нуля за $\frac{3}{4} : (3,5 - 3) = \frac{3}{2}$ часа, то есть 90 минут, где $3,5 - 3 = 0,5$ км/ч – это скорость сближения охраны и беглеца. Всего $15 + 90 = 105$ минут.

Беглец же добежит до точки A' чуть больше, чем за 100 минут. Действительно, по условию $TM = 3$ км. По теореме Пифагора из прямоугольного треугольника TMA , $TA = 5$ км. Расстояние 5 км беглец проходит за $\frac{5}{3}$ часа, то есть за 100 минут. Поэтому если мы возьмём точку A' достаточно близко к точке A , то беглец успеет дойти до A' быстрее, чем за 105 минут.

Убедитесь сами, что до любой точки A' , которая выше точки A , беглец дойдёт быстрее, чем вторая группа охраны. Мы лишь проверим, что до точки A беглец и охранники добираются за одинаковое время, то есть за 100 минут. Действительно, охрана оказалась у моста через 20 минут. Она преодолела 4 км вдоль реки до точки A за $\frac{4}{3}$ часа, то есть за 80 минут. Итого $20 + 80 = 100$ минут – столько же, сколько у беглеца.

■ ПОЧЕМУ ПЧЁЛЫ ОБЩЕСТВЕННЫЕ, А БАБОЧКИ НЕТ?

1. Муравьи-амазонки стали самыми настоящими рабовладельцами. Их прекрасно вооружённые солдаты врываются в муравейники других видов, убивая стражу, выносят оттуда личинок и куколок и докармливают их в своём гнезде (силами рабов, захваченных в предыду-

щих набегах). Вышедшие из куколок рабочие запоминают запах гнезда амазонок как «свой» и покорно работают на новую колонию, считая родных сестёр (оставшихся в материнском муравейнике) чужаками.

2. Эти муравьи стали «социальными паразитами». Матка проникает в гнездо обычного вида муравьёв, рабочие которого принимают её, поскольку она пахнет похоже, и начинают о ней заботиться, как и о своих матках. Паразитке остаётся только откладывать яйца, о которых позаботятся местные рабочие, а затем новое поколение самцов и самок вылетает из муравейника и отправляется заселять новые.

■ ПАТТЕРН-ГОЛОВОЛОМКА

Решение автора приведено на рисунке 1. Интересно, что этим узором можно замостить бесконечную плоскость (так, чтобы каждая пустая область совпадала с одной из исходных фигурок), но это уже совсем другая задача.

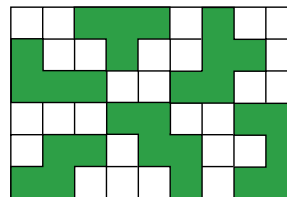


Рис.1

Приводим также решение Алексея Лаптиева (рис. 2).

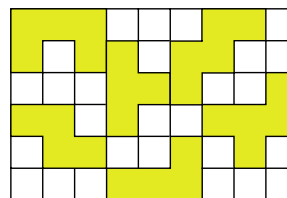


Рис.2

■ СЛОВОБУСЫ

Андрей мог найти на первом Катином словобусе: сет, Ом, си, пот и др.

На втором Катином словобусе можно прочитать: кони, пора, кара, жар, пир, жир, зри, они, кон, Ира и мн. др.

Недостатки второго словобуса: слова «кино» и «пони» содержат повторяющуюся букву «н» в одном и том же месте. Из-за этого получается меньше комбинаций. Ещё можно посмотреть на сочетание гласных и согласных: в коротких словобусах «зр» и «зн» не очень удобны.



Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем **МАТЕМАТИЧЕСКОМ КОНКУРСЕ**.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 1 сентября электронной почтой по адресу matkonkurs@kvantik.com или обычной почтой по адресу 119002, Москва, Б. Власьевский пер., д. 11, журнал «Квантик».

В письме кроме имени и фамилии укажите город, школу и класс, в котором вы учитесь, а также обратный адрес.

В конкурсе также могут участвовать команды: в этом случае присылается одна работа от команды со списком участников. Результаты среди команд подводятся отдельно.

Задачи конкурса печатаются в каждом номере, а также публикуются на сайте www.kvantik.com. Итоги будут подведены после этого тура. Участвовать можно, начиная с любого тура. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик» и призы.

Желаем успеха!

VIII ТУР



36. Учительница попросила Васю выписать все целые числа от 1 до 100 в любом порядке. Вася решил выписать их подряд, но поскольку он всегда путает цифры 6 и 9, получилось вот что: 1, 2, 3, 4, 5, 9, 7, 8, 6, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 19, 17, ..., 67, 68, 66, 100. Выполнил ли Вася задание учительницы?

37. Обведём в красный кружок каждое число от 1 до миллиарда, у которого все цифры нечётные, а у следующего за ним числа все цифры чётные. Обведём в синий кружок каждое число от 1 до миллиарда, у которого все цифры чётные, а у следующего за ним числа все цифры нечётные. Каких чисел больше – красных или синих, и во сколько раз?



наш КОНКУРС ОЛИМПИАДЫ

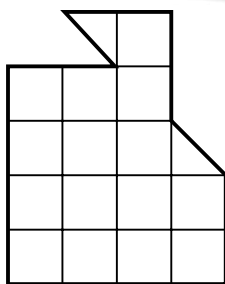
Авторы задач: Егор Бакаев (36), Григорий Гальперин (37, 38),

Наталья Стрелкова (39), Павел Кожевников (40)



38. В комнате собралось несколько человек, каждый из которых либо рыцарь, либо лжец (рыцари всегда говорят правду, а лжецы всегда лгут). Затем каждый сказал остальным одно и то же: «Среди вас всего 5 рыцарей и 7 лжецов». И вдруг один из присутствующих сказал: «Мы все солгали».

Сколько же всего было человек в комнате, и сколько из них лжецов, а сколько рыцарей?



39. Изображённую на рисунке фигуру разрежьте на четыре одинаковые части.

40. а) Дана клетчатая полоска 1×9 , клетки которой раскрашены в шахматном порядке. За одну операцию надо выбрать в ней любую одну или несколько подряд идущих клеток и перекрасить их в противоположный цвет. Сделайте полоску одноцветной за 4 операции.

б) А можно ли сделать её одноцветной за 3 операции?

в) Теперь дана доска 9×9 , клетки которой раскрашены в шахматном порядке. За одну операцию надо выбрать на доске любой клетчатый прямоугольник и во всех его клетках изменить цвет на противоположный. Сделайте доску одноцветной, потратив всего 8 операций.

г) А можно ли сделать её одноцветной за 7 операций?





ЗМЕЙКА ИЗ КУБИКОВ

На рисунке изображена «змейка» из кубиков. Какое наименьшее число кубиков потребуется, чтобы замкнуть её?

ISSN 2227-7986



16008
9 772227 798169