№2 | февраль 2012

Издается при поддержке Московского центра непрерывного математического образования (МЦНМО)

e-mail: kvantik@mccme.ru

ЖУРНАЛ КВАНТИК ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

преданья старины

как устроен язык

«УВЕЛИЧИТЕЛЬ» ДЕНЕГ

тайная комната мистера Эймса

внутри

№2 февраль 2012

ПРИЯТНОГО АППЕТИТА

ВКЛАД «ОБАЛДЕННЫЙ»

Enter

ДОРОГИЕ ДРУЗЬЯ!

Перед вами – второй номер «Квантика».

Хотите прочитать о жизни юного гения – математика и революционера? Знаете ли, что бывают сказки, в которых притаились математические задачки? Интересно заглянуть в тайную комнату, где предметы меняют свой размер прямо на ваших глазах, да ещё и самим смастерить такую комнату? Сумеете правильно подсчитать проценты по вкладу с названием «Обалденный»? Поможете Квантику-альпинисту выпутаться из очень непростой ситуации? А может, вы не прочь поработать переводчиком с суахили (на этом языке говорят 30 миллионов человек)? Или принять участие в нашем задачном конкурсе?

Тогда открывайте номер. Приятного чтения!

Художник Yustas-07

Наш электронный адрес:
kvantik@mccme.ru

www.kvantik.com

Главный редактор: С. Дориченко
Зам. главного редактора: И. Маховая
Редактор: Г. Фельдман
Главный художник: Yustas-07
Художественный редактор: Д. Кожемякина
Верстка: И. Гумерова, Р. Шагеева
Обложка: художник Yustas-07
Формат 84x108/16
Издательство МЦНМО

Журнал «Квантик» зарегистрирован в Федеральной службе по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций.

Свидетельство ПИ N ФС77-44928 от 4 мая 2011 г.
Тираж: 1-й завод 500 экз.

Адрес редакции:
119002, Москва,
Большой Власьевский пер., 11.
Тел. (499)241-74-83.
e-mail: kvantik@mccme.ru
По вопросам распространения обращаться по телефону:
(499) 241-72-85;
www.kvantik.com
e-mail: biblio@mccme.ru

Подписаться можно в отделениях связи Почты России, подписной индекс **84252**.

Отпечатано в соответствии с предоставленными материалами в ЗАО "ИПК Парето-Принт", г. Тверь.
www.pareto-print.ru
Заказ №

СОДЕРЖАНИЕ

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

Приятного аппетита 2

ЧУДЕСА ЛИНГВИСТИКИ

Хочешь узнать, как устроен язык? 6

ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Вклад «Обалденный» 10

СВОИМИ РУКАМИ

Тайная комната 12

НАГЛЯДНАЯ МАТЕМАТИКА

Параллелограмм и равенство площадей 19

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

Старинные русские меры веса 24

ВЕЛИКИЕ УМЫ

Эварист Галуа 26

ОТВЕТЫ

Ответы, указания, решения к №1 за 2012 год 29

ОЛИМПИАДЫ

Наш конкурс 32

КОМИКС

Квантик-альпинист IV страница обложки

ОГЛЯНИСЬ ВОКРУГ

И. Акулич

– Отправимтесь-ка все, так как есть, к полицеймейстеру; он у нас чудотворец: ему сто́ит только мигнуть, проходя мимо рыбного ряда или погреба, так мы, знаете ли, так закусим!

Н. В. Гоголь.
Мёртвые души.
Глава 7

Приятного аппетита

Среди множества народных сказок некоторые вызывают особый интерес своим несомненным математическим содержанием. К таковым можно отнести русскую сказку «Как мужик курицу делил»*.

Сюжет её таков. Бедный мужик решил поздравить помещика с праздником. Он зажарил единственную имевшуюся у него курицу и доставил как раз к обеду. А у помещика, надо сказать, семья была не маленькая: он сам, да жена, да два сына, да две дочери.

– Спасибо за угощение! – сказал помещик. – Садись с нами за стол. И подели-ка своё угощение между всеми, а то, кажется, маловато выходит.

– С удовольствием! – ответил мужик. – Ты, барин, в доме голова – так вот тебе голову. С другой стороны, жена твоя – это шея: куда повернется, туда голова и смотрит. Поэтому ей мы отдаём шею**. Сыновьям твоим, как вырастут, предстоит много дорог пройти, изрядно ноги истоптать, поэтому им даём по ноге. Дочери твои скоро замуж выйдут и улетят из родного дома, так что им – по крылышку. Ну, а мне, мужику, то, что осталось, – туловище.

Такая математика помещику весьма понравилась, и он щедро заплатил мужику.

Однако на том история не закончилась. Узнал обо всем этом другой мужик – богатый – и принёс помещику аж пять жаре-

ных кур, рассчитывая получить пропорционально большее вознаграждение. Но тот его огорошил, потребовав:

– Раздели-ка ты этих кур между нами, чтобы всем досталось поровну.

Богатый мужик оторопел: как поделить 5 кур на 6 человек (или даже на 7, если учесть его самого)? Пришлось вновь обращаться к бедному мужику, который за словом в карман не полез:

– Тебе, барин, с женой даём на двоих одну курицу – и вас стало трое. Твоим сыновьям тоже одну курицу – вот и их трое. И дочерям одну курицу – опять получается трое. Ну а мне, мужику, две курицы – и нас трое! Всем поровну!

В результате он славно подзакусил (и получил в придачу от помещика ещё одну денежную премию за остроумие и сообразительность).

Вот такая математическая сказка. Что, скажете, не вполне математическая? Пожалуй. Тогда давайте перенесёмся несколько южнее и западней, взяв в руки сборник сказок классика молдавской и румынской литературы Иона Крянгэ (1837-1889). До чего ж они хороши! А персонажи-то каковы: отважный Фэт Фрумос, неунывающий Иван Турбинка, злобный песиголовец*** и другие, не менее колоритные, не дают читателю заскучать ни на минуту.

Но не только волшебными приключениями интересны сочинения замечательного писателя. Не чурался он и бытовых сказок, среди которых мы и встречаем одну очень даже математическую.

Итак, шли куда-то два путника. У одного в котомке было два хлеба, у другого – три. Когда они собрались пообедать, к ним присоединился третий, не имевший ничего. Когда они втроем съели весь хлеб, поделив его поровну, третий дал первым двоим пять монет в уплату за угощение. Те заспорили, как поделить деньги по справедливости. Первый требовал делить пополам – по две с половиной, а второй – соответственно имевшемуся изначально количеству хлебов, то есть 2 и 3. Кто прав?****

Давно известно, что при дележе денег правых не бывает. Точнее, каждый считает, что прав только он сам, ибо понятие о справедливости у каждого своё. На первый взгляд, конечно, представляется, что делёж первого (поровну) абсурден. Хотя он мог вполне разумно обосновать своё мнение. Например, так: «Представь себе, что наш гость вообще ничего нам не заплатил. Тогда бы мы получили по круглому нулю, то есть, несомненно, поровну. Почему же сейчас мы должны делить не поровну?».

Звучит убедительно. Но на языке шулеров такое рассуждение – типичное передёргивание, и его легко опровергнуть. В случае, когда гость ничего не платит, первый как бы остаёт-

* Это – собирательное название; в различных сборниках она озаглавлена по-разному.

** В некоторых вариантах сказки он говорил чуть по-иному: «Жена твоя хозяйка-хлопотунья, должна всё время по дому вертеться, так что ей – гузку!». С питательной точки зрения мало чем от шеи отличается.

*** Жуткое существо, похожее на человека с собачьей головой. Упаси Бог такое встретить!

**** Вечный вопрос! Правда, чаще он формулируется в альтернативном виде: «Кто виноват?».

ся должен второму. Ведь все ели хлеб поровну, но второй внёс больше, чем первый. А если гость что-то платит, то почему бы не рассчитаться так, чтобы никто никому ничего не одалживал? И делить деньги тогда надо явно не поровну.

Ну, а делёж второго выглядит безупречно, и большинство людей считают его абсолютно правильным.

Но и это не так, в чём мы убеждаемся, читая сказку дальше. Повздорив, путники пришли в город, где обратились к судье, и тот, рассмотрев ситуацию, объявил, что первому причитается лишь одна монета, зато второму – остальные четыре! Он рассуждал так. Всего было 5 хлебов, поэтому каждый съел $\frac{5}{3}$ хлеба. Значит, первый из двух своих хлебов $\frac{5}{3}$ съел сам, а третьему оставил только $2-\frac{5}{3}=\frac{1}{3}$ хлеба. Второй же выделил ему $3-\frac{5}{3}=\frac{4}{3}$ хлеба, то есть вчетверо больше первого, потому-то ему и причитаются 4 монеты против одной, полагающейся первому.

Вот как первого погубила жадность. Хотел урвать полмонеты – и потерял целую! Похоже, после этого он наверняка до конца дней возненавидел судебные власти. И, конечно, весьма удивительно, что вполне разумный делёж второго тоже оказался ошибочным. Но не надо совсем списывать его со счетов – он был бы пригоден при несколько ином повороте сюжета: если третий путник окажется настолько голоден и проворен, что проглотит все пять хлебов ещё до того, как первые двое успеют открыть рот! Тогда, по сути, речь пойдёт просто о продаже ему всех запасов хлеба.

Тут и сказке конец. Однако не исключено, что читатели встречали подобный сюжет где-нибудь ещё. Например, в «Живой математике», принадлежащей перу известного популяризатора естественных наук Якова Исидоровича Перельмана (1882 –1942), описывается случай с жильцами коммунальной

квартиры. Тройкина бросила в общую печь 3 полена, Пятёркина бросила 5 поленьев, а их сосед Бестопливный пользовался их огнём и заплатил за это 8 рублей. Оказывается, и здесь хозяйка трёх поленьев получает лишь один рубль!

Обратим внимание: как-то очень удачно у них всё делится – всё время нацело! А будь у этих путников (жильцов) другое количество хлебов (поленьев) – не придётся ли им рубить монеты на части?

Давайте выясним. Пусть у первого и второго путников было m и n хлебов соответственно. Тогда каждый из троих съел $\frac{m+n}{3}$ хлебов, поэтому первый дал третьему

$$m - \frac{m+n}{3} = \frac{2m-n}{3} \text{ хлебов,}$$

а второй дал третьему

$$n - \frac{m+n}{3} = \frac{2n-m}{3} \text{ хлебов.}$$

Поэтому общую сумму $m + n$ монет они должны разделить в пропорции

$$\frac{2m-n}{3} : \frac{2n-m}{3},$$

или, отбросив тройки в знаменателях, в пропорции

$$(2m - n) : (2n - m).$$

Сколько же достанется каждому? Это даже считать не надо! Так как $(2m - n) + (2n - m) = m + n$, то есть как раз соответствует общему числу монет, то первый и второй именно столько и получат: $2m - n$ и $2n - m$ монет соответственно. Видите – заведомо целые числа! Значит, имеем удивительный результат: сколько бы хлебов у путников ни было, они всегда получат по целому числу монет. И кстати, непременно должны выполняться неравенства: $n \leqslant 2m$ и $m \leqslant 2n$, иначе кому-то из путников достанется отрицательная сумма денег.

Первый вопрос читателю: как объяснить эту отрицательную сумму с «практической» точки зрения?

Как видно, для большинства m и n справедливый делёж отличается от «естественной» пропорции $m : n$ (и совпадает с ним в единственном случае: когда $m = n$). При этом наиболее эффектно он выглядит, если тому, кто имел меньше хлебов, достанется одна-единственная монета. Интересно, каковы должны быть для этого m и n?

Второй вопрос читателю: опишите все такие пары чисел m и n.

Напоследок посоветуем читателю на досуге проанализировать с математической точки зрения какие-нибудь другие «съедобные» сказки. Например, «Колобок» или «Репку». Приятного аппетита!

Художник С.Чуб

Чудеса лингвистики

С. Бурлак

Хочешь узнать, как устроен язык?

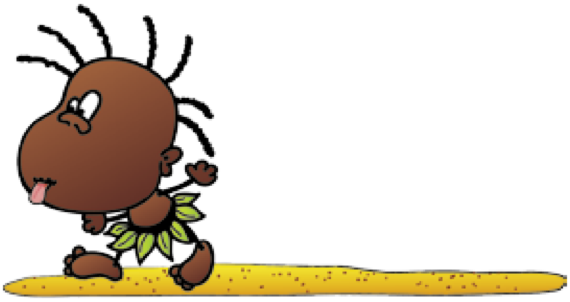
Даны слова на языке суахили* и их переводы на русский язык:

Переведите на язык суахили:
я буду тебя любить, он их любил, я его люблю, он меня любит.

Как же это перевести? Неужели для этого не надо знать суахили? А почему в суахилийском столбце слов меньше, чем в русском? Как они вообще ухитряются вместить столько информации в одно слово? А вот это – правильный вопрос. В лингвистической задаче (как и в настоящей науке, кстати) правильно поставленный вопрос – половина ответа.

В самом деле, в суахилийских словах заключено очень много информации: и глагол «любить», и время, и все местоимения, которые могут здесь быть подлежащими или дополнениями. А иначе как понять, что, например, ninakupenda – это именно «я тебя люблю», а не, скажем, «он её любил»? Раз мы можем дать точные переводы, значит, вся необходимая информация в суахилийском тексте имеется. А если так, то мы можем её найти.

* *Суахи́ли (kiswahili)* – самый распространённый из языков языковой семьи банту. На нём говорит около 30 млн человек в нескольких странах Восточной и Центральной Африки.

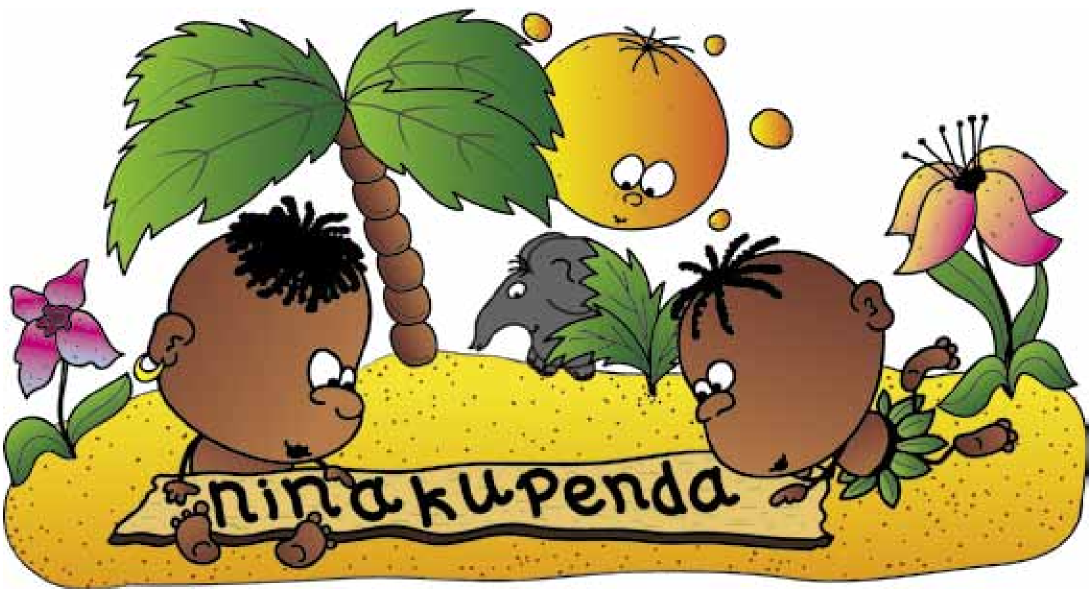


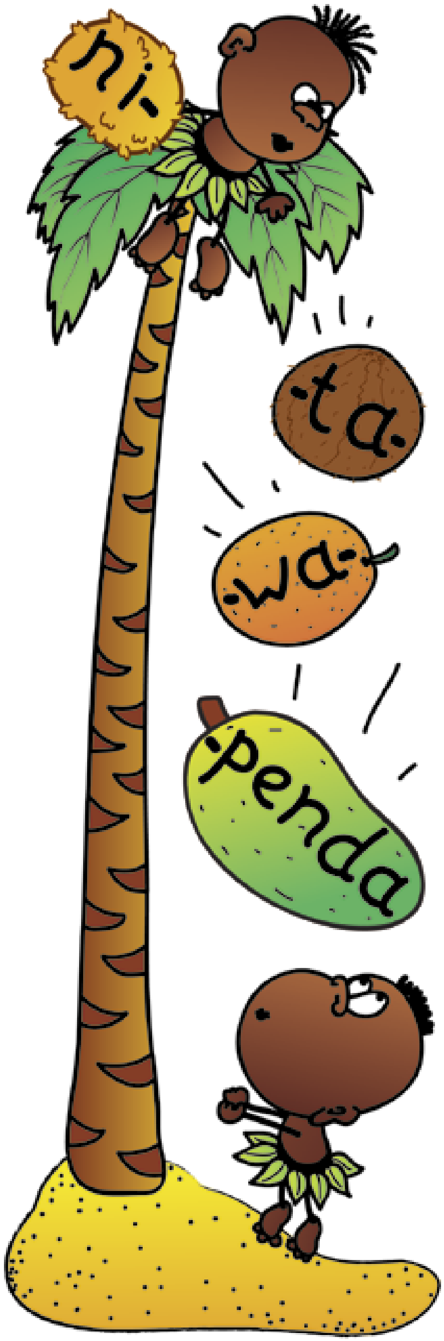
Проще всего определить, какая часть суахилийского слова отвечает за значение «любить» – этот глагол (в разных формах) есть во всех русских переводах. Легко заметить, что все суахилийские слова заканчиваются на *-da*. Точнее, если присмотреться, на *-penda*. Именно этот фрагмент повторяется во всех приведённых здесь словах языка суахили. Давайте сразу выпишем это чётким почерком, чтобы потом, записывая ответ, ничего не перепутать.

что делать	
-penda	«любить»

Итак, *-penda* означает «любить». А всё, что перед ним, содержит информацию об участниках и времени действия. Для того чтобы легче было разобраться, выпишем материал в два столбца:

«я»		не-«я»	
ninaku-penda	я тебя люблю	anaku-penda	он тебя любит
nimeku-penda	я тебя любил	utam-penda	ты будешь его любить
nitawa-penda	я буду их любить	umeni-penda	ты меня любил
		anawa-penda	он их любит





Что есть в первом столбце («я»), чего нет во втором (не-«я»)? Правильно, все слова в нём начинаются с *ni*-. А во втором столбце ни одно слово с *ni*- не начинается. Значит, приставка *ni*- в языке суахили обозначает «я». Таким же способом можно определить, что приставка *u*- обозначает «ты», а приставка *a*- обозначает «он». Дополним нашу табличку:

кто	что делать
ni- «я»	-penda «любить»
u- «ты»	
a- «он»	

Теперь разберёмся с дополнениями: узнаем, как обозначается тот, кого любят. Выписываем оставшиеся части суахилийских слов в четыре столбца (постарайтесь уследить):

меня	тебя	его	их
u-meni- «ты меня...»	ni-naku- «я тебя...»	u-tam- «ты его…»	ni-tawa- «я их...»
	ni-meku- «я тебя...»		a-nawa- «он их...»
	a-naku- «он тебя…»		

В столбце «тебя» все элементы заканчиваются на -*ku*-. Значит, -*ku*- и есть «тебя» (запомним это!). В столбцах «меня» и «его» всего по одному примеру – значит, подождём пока делать выводы. В столбце «их» тоже всё слишком одинаково: -*a*-? -*wa*-? -*awa*-? Ладно, отложим пока это и разберёмся со столбцом «тебя». В него попали слова:

ni-na-ku-penda *Буквально: я+?+тебя+любить*	я тебя люблю
a-na-ku-penda *Буквально: он+?+тебя+любить*	он тебя любит
ni-me-ku-penda *Буквально: я+?+тебя+любить*	я тебя любил

Что же выражает вторая приставка? Очевидно, то, что ещё есть в русских переводах и чего мы пока совсем не видели в суахилийских словах: время. Проверим это предположение. И опять – расписывание по столбцам. На этот раз их три, ведь в русском языке как раз три времени:

настоящее время	прошедшее время	будущее время
ni-na-ku- – я тебя люблю	ni-me-ku- – я тебя любил	ni-tawa- – я буду их любить
a-na-ku- – он тебя любит	u-meni- – ты меня любил	u-tam- – ты будешь его любить
a-nawa- – он их любит		

Художник Л.Широнина

Заметили? В первом столбце (и только в нём!) всегда есть *-na-*, во втором (и только в нём!) – *-me-*, в третьем – *-ta-*. И это мы тоже занесём в таблицу, чтобы потом не забыть:

кто	когда	что делать
ni- «я»	-na- наст. вр.	-penda «любить»
u- «ты»	-me- прош. вр.	
a- «он»	-ta- буд. вр.	

Вот теперь уже легко сказать, где начинаются обозначения местоимений-дополнений: после показателей времени. Значит, «меня» – это *-ni-*, «его» – *-m-*, а «их» – *-wa-*. Помните, раньше мы уже выяснили, что *-ku-* означает «тебя»?

Наконец, наша табличка заполнилась целиком. Обратите внимание: приставки выписаны сразу в нужном порядке, чтобы не путаться:

КАК СТРОИТСЯ ГЛАГОЛ В ЯЗЫКЕ СУАХИЛИ			
кто	**когда**	**кого**	**что делать**
ni- «я»	-na- наст. вр.	-ni- «меня»	-penda «любить»
u- «ты»	-me- прош. вр.	-ku- «тебя»	
a- «он»	-ta- буд. вр.	-m- «его»	
		-wa- «их»	

Теперь, когда у нас есть красивая разборчивая табличка, выписать ответ очень легко:

я буду тебя любить	= «я»+«буд.»+«тебя»+«любить»	= ni+ta+ku+penda	= nitakupenda
он их любил	= «он»+«прош.»+«их»+«любить»	= a+me+wa+penda	= amewapenda
я его люблю	= «я»+«наст.»+«его»+«любить»	= ni+na+m+penda	= ninampenda
он меня любит	= «он»+«наст.»+«меня»+«любить»	= a+na+ni+penda	= ananipenda

А теперь вы легко сможете решить такую задачу Московской традиционной Олимпиады по лингвистике (её автор – Изабэлла Николаевна Шахова, неоднократная победительница лингвистической Олимпиады, выпускница факультета лингвистики РГГУ):

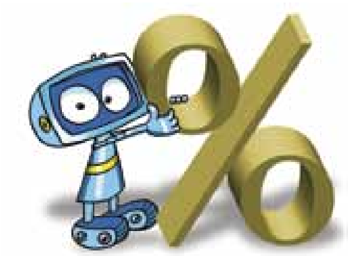
*Даны числительные языка хауса**
ɗari bakwai da hamsin da shidda – 756
sitta da ɗari bakwai da biyar – 6705
saba'a da ɗari biyar da sittin – 7560

А. Переведите с хауса:
saba'in da biyar,
ɗari shidda da sittin da shidda

Б. Запишите на хауса: 67; 5605

* **Ха́уса** – один из западно-чадских языков. На нём говорит от 30 до 40 млн человек в Нигерии и ряде других стран Африки.

', **ɗ** – особые согласные языка хауса



ЗАНИМАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕНТЫ

Вклад «Обалденный»

Г. Фельдман

Привет! Я – Вилли. Работаю программистом в Kotleta-банке. А это мой босс Джо. За глаза его зовут Неудачником. Хоть он и босс, а регулярно делает всякие глупости. Даже с элементарными логическими рассуждениями у Джо проблемы. Так что без меня ему никак – кто же его будет выручать?

Когда мы открылись, у нас был только один вклад «Обалденный». Вклад проще некуда: годовой, под 10% годовых, то есть вкладчик даёт нам сколько-то долларов на год, а возвращаем мы ему на 10% больше. Вычислять легко: если кто внёс X долларов, через год положит в карман $1{,}1 \cdot X$ долларов (скажем, \$1000 превратятся в \$1100).

Если вкладчик забирает деньги раньше, то никаких процентов не получает. Естественно! Ведь мы платим ему за гарантию, что деньги будут в нашем распоряжении целый год. А уж мы попытаемся извлечь из них выгоду (например, вложим в какой-нибудь бизнес).

Хочется внести X долларов на 2 года? Пожалуйста – через год старый вклад закрывается и тут же создаётся новый, в котором начальная сумма уже $1{,}1 \cdot X$ долларов.

Первым «Обалденным» вкладчиком стала мисс Уткинс. Джо так обрадовался, что сам побежал её обслуживать. Мисс Уткинс принесла в банк свою годовую премию \$1000 и спрашивала, какую прибыль от вклада она получит через 5 лет? Джо несколько растерялся и пробормотал: раз 10% годовых, то за 5 лет будет 50%, то есть прибыль составит \$500.

Вопрос: Почему Неудачник Джо неправ?

Я поспешил исправить Джо. Я сказал мисс Уткинс, что через год у неё будет $1{,}1 \cdot \$1000 = \$1100$, через 2 года уже $1{,}1 \cdot (1{,}1 \cdot \$1000) = 1{,}1^2 \cdot \$1000 = \$1210$, и так далее.

Через 5 лет у неё окажется $1{,}1^5 \cdot \$1000 = \$1610{,}51$, то есть получается \$610,51 чистой прибыли! Вообще, за n лет прибыль составит $(1{,}1^n - 1) \cdot \$1000$.

Мисс Уткинс осталась довольна. Она сказала, что премию \$1000 дают каждый год, и ей хотелось бы держать все эти деньги у нас.

Вопрос: Сколько денег будет на счёте мисс Уткинс через 5 лет, если все годовые премии она будет относить в Kotleta-банк?

Неудачник замешкался, и я понял: опять надо помогать, хоть вопрос и простой. Те \$1000, которые положит мисс Уткинс сейчас, за пять лет превратятся в $1{,}1^5 \cdot \$1000$. Следующие \$1000, которые она добавит через год, превратятся в $1{,}1^4 \cdot \$1000$, и так далее. Всего через 5 лет получается (включая взнос в начале шестого года)

$$(1{,}1^5 + 1{,}1^4 + 1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1^1 + 1) \cdot \$1000.$$

Мне стало лень считать значение такого большого выражения на калькуляторе, и я решил облегчить себе работу. Я сделал трюк* – домножил и разделил выражение на $1{,}1 - 1$:

$$(1{,}1^5 + 1{,}1^4 + 1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1^1 + 1) \cdot \$1000 = \frac{(1{,}1^5 + 1{,}1^4 + 1{,}1^3 + 1{,}1^2 + 1{,}1^1 + 1)\,(1{,}1 - 1)}{(1{,}1 - 1)} \cdot \$1000.$$

Раскрывая скобки в числителе (там почти всё сократится), легко понять, что на счетах мисс Уткинс окажется

$$\frac{1{,}1^6 - 1}{1{,}1 - 1} \cdot \$1000 = \$7715{,}61.$$

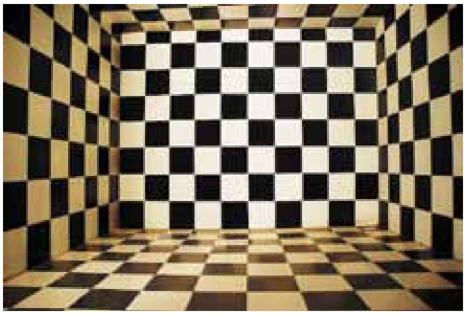
* Если ты знаешь, что такое геометрическая прогрессия, то сразу поймёшь, что Вилли просто вывел формулу для суммы её членов

Художник С.Чуб

К. Фролова

ТАЙНАЯ КОМНАТА

У вас никогда не возникало желания посмотреть в глазок закрытой двери? А вдруг там творится что-нибудь удивительное? Давайте же заглянем!



Вы смотрите через замочную скважину, и, на первый взгляд, ничего особенного не видите: выложенный квадратной плиткой чёрно-белый пол, два одинаковых окна на дальней стене. В комнате стоят два человека. Один, очень большой и высокий, в правом дальнем углу комнаты, второй – в левом, и он почти в два раза меньше ростом, чем первый. В какой-то момент эти два человека решают поменяться местами: они медленно идут навстречу друг другу, при встрече пожимают руки. Но – это невероятно – тот, что был слева, с каждым шагом как будто растёт, а тот, что был справа, – наоборот, уменьшается!

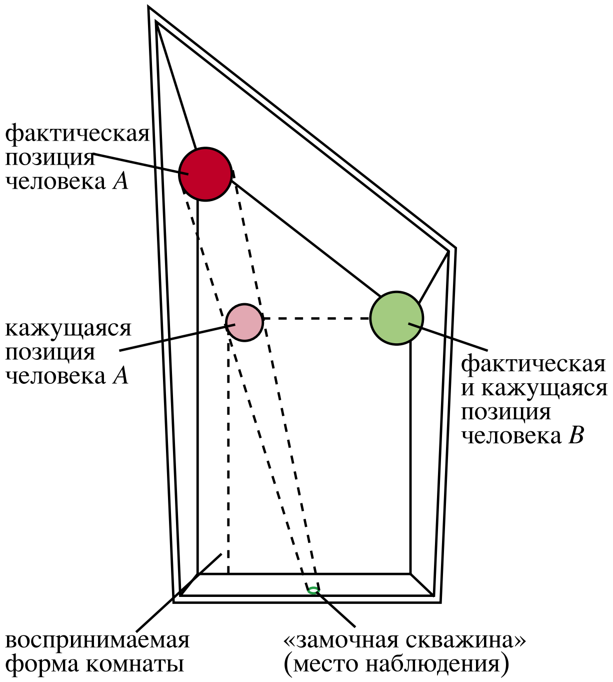
И вот, когда они окончательно меняются местами, вы видите, что один снова в два раза выше другого. Это произошло на ваших глазах. Что за странное место, и как всё это можно объяснить?

Это волшебное место называется комнатой Эймса. Впервые она была сконструирована американским офтальмологом, психологом и физиком Адельбертом Эймсом-младшим в 1935 году. Секрет её в том, что она не прямоугольная, как обычные комнаты. Но почему через замочную скважину нам всё равно кажется, что комната правильной, прямоугольной формы? И как люди могут уменьшаться или расти, переходя из одного угла в другой?

Попытаемся сначала ответить на первый вопрос. Всё дело в конструкции комнаты. Её пол не прямоугольный, а имеет форму трапеции. Левая стена и стена напротив наблюдателя сходятся друг с другом под острым углом, да так, что он оказывается вдвое дальше от наблюдателя, чем правый, тупой угол (см. рисунок на с.13). Пол положен с наклоном к дальнему углу. Помогает обманывать наш глаз и чёрно-белая плитка. Ничто не выдает истинной формы комнаты. Очень важна точка, с которой мы за ней наблюдаем, небольшое окошко в стене. Если поменять расположение «замочной скважины», весь эффект комнаты Эймса исчезнет. Ведь эта точка выбрана так, чтобы лучи, идущие в эту точку из четырёх углов задней стены, сходились точно так же, как в прямоугольной комнате – под такими же углами друг к другу.

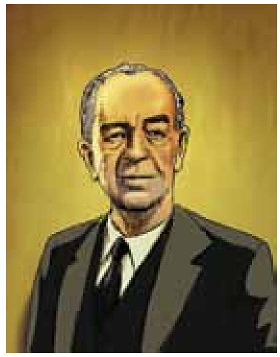
Есть и ещё одно соображение. За годы работы в четырёх стенах наш мозг так привык к прямоугольным комнатам, что заставляет нас и про комнату Эймса думать, будто она прямоугольная. Мозг создал себе стереотип, а создатели комнаты воспользовались этим, чтобы его обмануть. Хотя это объяснение спорно. Люди, которые не выросли в мире прямоугольных комнат, тоже без труда поддаются иллюзии.

Чтобы ответить на второй вопрос – почему нам кажется, что люди в комнате Эймса увеличиваются и уменьшаются – выясним сначала, как мы определяем расстояния до предметов.

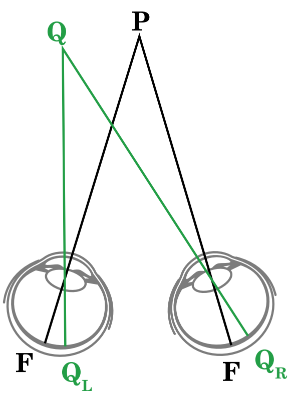


Человеческий мозг может это делать тремя разными способами. Первый – самый простой – по предметам, размеры которых мы знаем. Например, мы видим идущего впереди человека и знаем, что его рост примерно 1 метр 80 см. Мозг сопоставляет размеры увиденного с предполагаемыми размерами и вычисляет примерное расстояние до объекта.

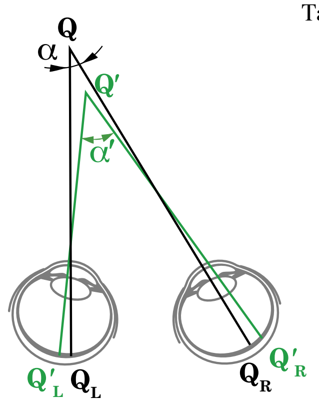
Второй приём – это сравнение изображений, поступающих с разных глаз. Заметьте, что каждый глаз видит что-то своё: ведь они расположены на расстоянии 6-7 см друг от друга (если считать расстояние между центрами зрачков). На сетчатке каж-



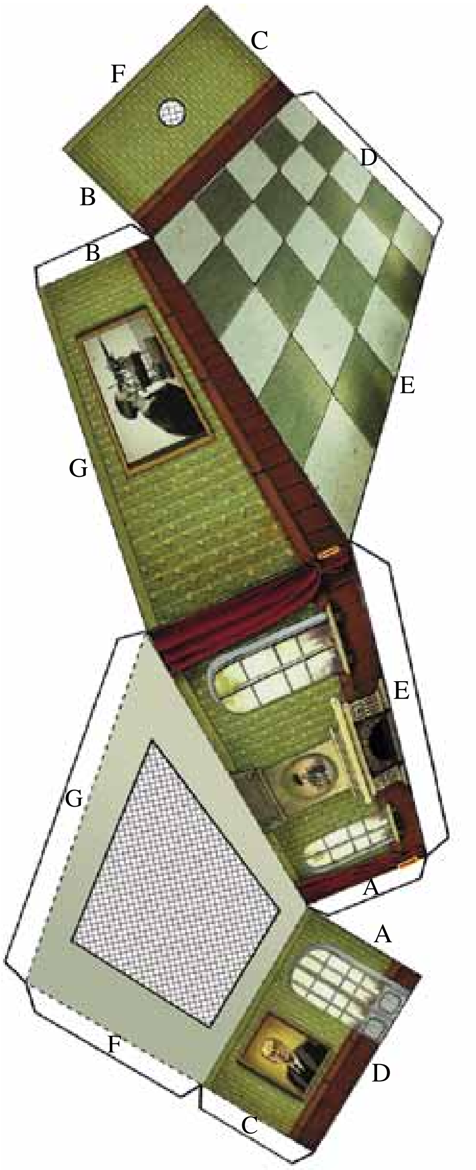
Таким увидел мистера Эймса наш художник



Наблюдатель смотрит в точку **P**, её изображения оказываются в центрах сетчаток **F**. Точка **Q** – на таком же расстоянии от глаз, показаны её изображения на сетчатках: $\mathbf{Q}_L$ – на левой, $\mathbf{Q}_R$ – на правой



Точка **Q** дальше от глаз, чем **Q′**: на сетчатках изображения дальней точки ($\mathbf{Q}_L$ и $\mathbf{Q}_R$) расположены ближе друг к другу, чем изображения ближней точки ($\mathbf{Q}'_L$ и $\mathbf{Q}'_R$)



Вы можете сами склеить модель комнаты Эймса из развёртки на с. 16–17 по схеме, приведённой выше. Сделайте в боковых стенах комнаты тонкие прорези (места для прорезей выделены оранжевым цветом на с. 16). Просуньте в прорези полоску с нарисованной монетой (вырезав ее со с. 16). Аккуратно склейте комнату, следя, чтобы клей не попал на полоску с монетой. Двигая полоску, вы увидите, как монета меняет свои размеры!

дого глаза формируется отдельное изображение, немного отличающееся от такого же в другом глазу (см. рисунки на предыдущей странице). А мозг, анализируя эти различия, составляет единую картину и формирует представление о расстоянии между предметами, о глубине картинки и т. д. Этот феномен называется *стереопсисом,* или *объёмным зрением*. Кстати, для стереопсиса нужны оба глаза, этим приёмом не могут воспользоваться люди, которые с рождения смотрят на мир только одним глазом.

А третий приём нашего мозга называется *параллаксом*. Если неподвижно смотреть вдаль, никакого параллакса не будет. Но сто́ит повертеть головой в разные стороны, как изображения предметов, которые располагались недалеко от наших глаз, начнут двигаться очень быстро, в то время как изображения удалённых объектов останутся почти неподвижными или сдвинутся ненамного. По разнице в скорости смены изображений предметов на сетчатке наших зрительных анализаторов мозг определяет, какие предметы находятся дальше от нас, а какие – ближе к нам.

А теперь, зная, как мы определяем расстояния между предметами, мы можем объяснить, как комнате Эймса удаётся нас обмануть.

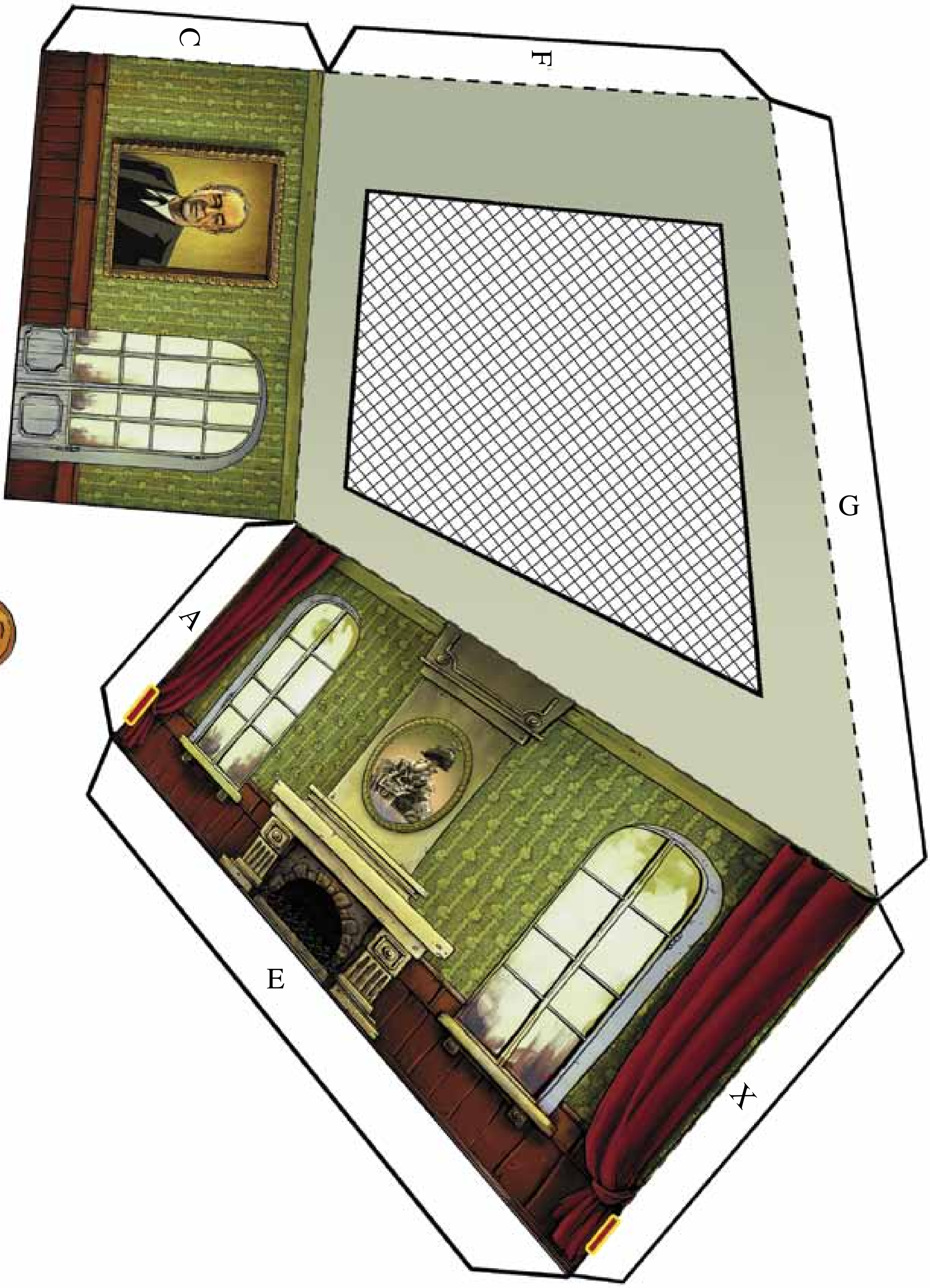
Используя свои приёмы по определению расстояний, наш мозг пытается оценить обстановку. Если бы не было стен и потолка, то, используя стереопсис и свой предыдущий опыт, мозг быстро определил бы, что один из людей находится дальше другого. Но вот их поставили в комнату и оставили только глазок для наблюдения. Вроде бы ничего не изменилось: всё те же 20 метров отделяют их друг от друга. Но теперь мозг не в состоянии использовать ни параллакс (глаз неподвижен), ни стереопсис (в глазок смотрит только один глаз). Осталось обмануть только опыт мозга. Дальняя от наблюдателя стена представляется ему обычной стеной, а значит, стоящие около неё люди кажутся находящимися на одинаковом расстоянии (от наблюдателя).

Вы можете частично воспроизвести эффект комнаты у себя дома. Для этого вам нужно завесить стену однотонной простыней так, чтобы нижняя часть ее спускалась, скажем, на стол. Поставьте два одинаковых предмета на расстоянии друг от друга, но так, чтобы они не были на одной прямой, перпендикулярной стене с простынёй. Теперь важно выбрать такую точку обзора (она будет довольно близко к столу), чтобы поверхность стола превратилась в одну линию. Тогда вы увидите, что два ваших предмета вроде и находятся на одной линии, но совершенно разного размера, как если бы они были далеко друг от друга.

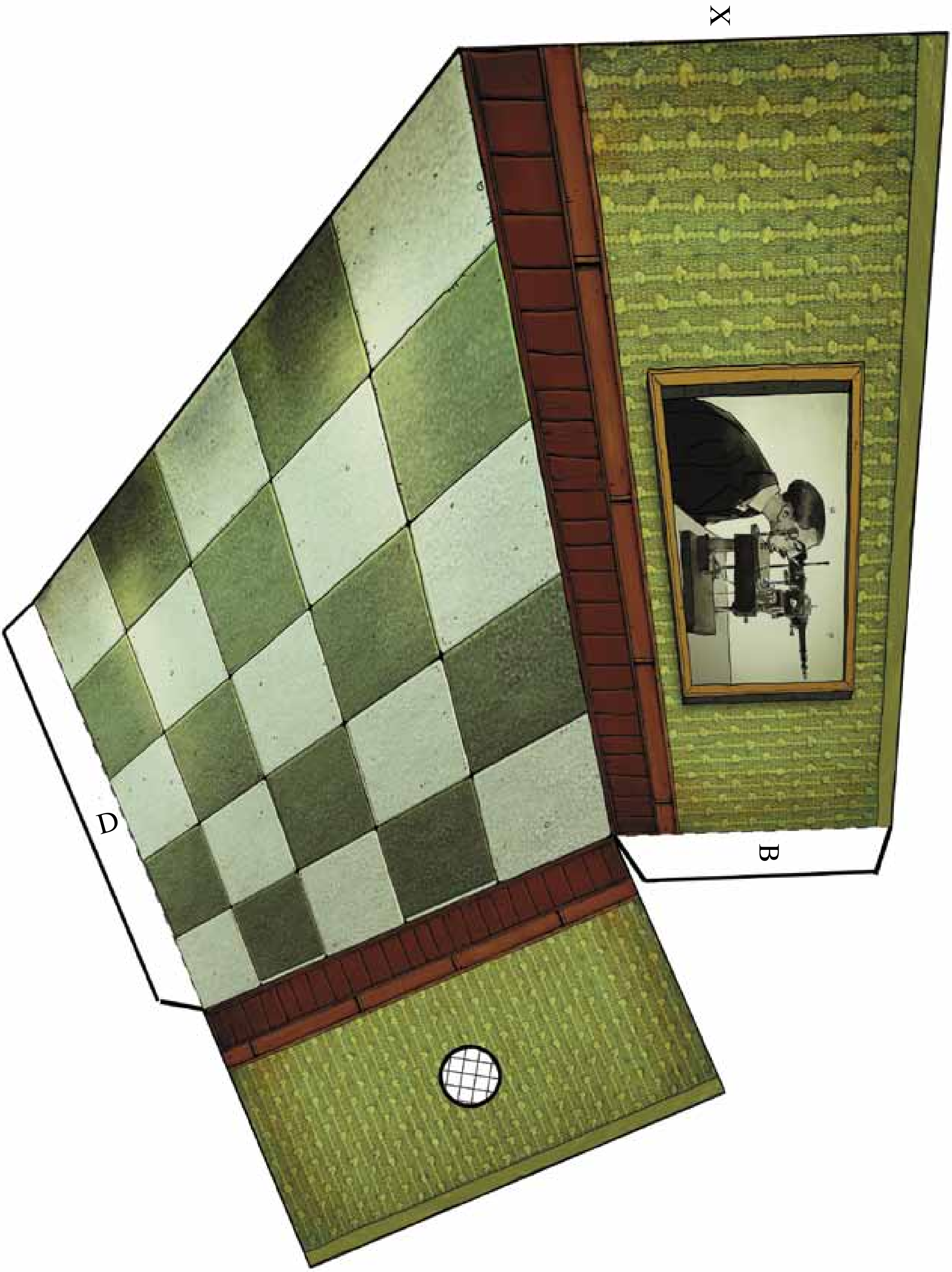
Вопрос. *Попробуйте объяснить эту оптическую иллюзию.*

журнал
КВАНТИК
для любознательных

Наш телефон:
(8-499)241-74-83



Идея развёртки: Project LITE, www.lite.bu.edu


X
D
B

ЖУРНАЛ
КВАНТИК
ДЛЯ ЛЮБОЗНАТЕЛЬНЫХ

Наш электронный адрес:
kvantik@mccme.ru

А. Щетников

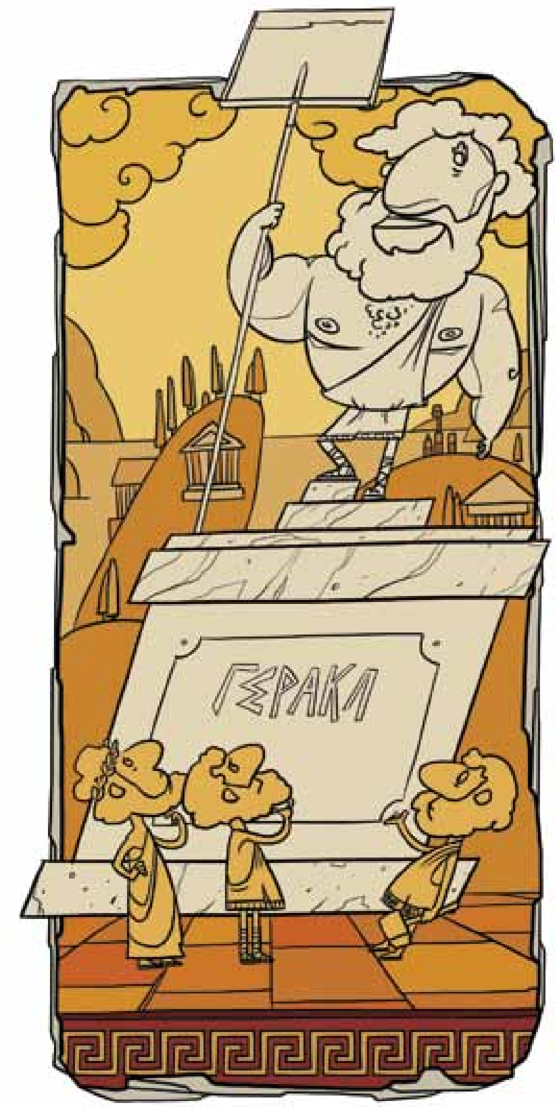
ПАРАЛЛЕЛОГРАММ И РАВЕНСТВО ПЛОЩАДЕЙ

«Геометрия за то и прославляется, что, заимствовав извне столь мало основных положений, она столь многого достигает», – говорил великий Ньютон. Даже если вы ещё не начали изучать геометрию в школе, вы сможете почувствовать правоту этих слов, если попробуете сами вывести из малого числа очевидных положений многие красивые и совсем не очевидные факты.

Все положения, которые мы будем рассматривать ниже, так или иначе связаны с такой геометрической фигурой, как параллелограмм. Параллелограммом называется четырёхугольник, противоположные стороны которого попарно параллельны. Мы будем считать существование параллелограмма, а также попарное равенство его противоположных сторон и углов очевидным фактом (рис. 1).

Рис. 1

Примем без доказательства ещё два очевидных факта, относящихся к параллелограмму. Древнегреческие математики называли такие очевидные утверждения леммами и доказывали их потом, сначала разбираясь с главным (само слово «лемма» первоначально означало «деньги, взятые взаймы»).



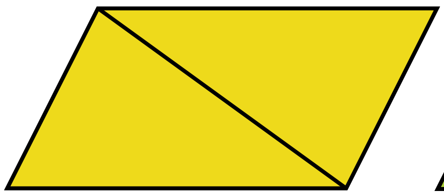


Рис. 2

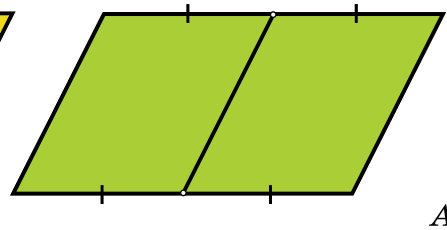


Рис. 3

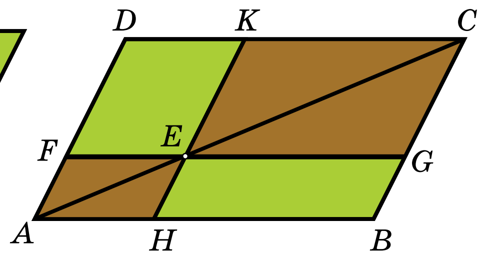


Рис. 4

Лемма 1. *Отрезок, соединяющий две противоположные вершины параллелограмма, делит этот параллелограмм на два равных треугольника* (рис. 2; проведённый отрезок называется диагональю параллелограмма).

Лемма 2. *Отрезок, соединяющий середины двух противоположных сторон параллелограмма, делит этот параллелограмм на два равных параллелограмма* (рис. 3; проведённый отрезок называется средней линией параллелограмма).

Основываясь на принятых леммах, мы можем доказать ряд теорем. (Само слово «теорема» тоже происходит из древнегреческого языка и означает некое «священное зрелище, достойное того, чтобы его рассматривать».)

Теорема 1. *Построим произвольный параллелограмм ABCD и проведём в нём диагональ AC. На этой диагонали отметим произвольную точку E. Проведём через точку E два отрезка FG и HK, каждый из которых соединяет две противоположные стороны параллелограмма и идёт параллельно двум другим сторонам* (рис. 4). *Утверждается, что параллелограммы HBGE и FEKD, лежащие по разные стороны от проведённой диагонали, будут равны по площади.*

Доказательство. Диагональ *AC* делит параллелограмм *ABCD* на равные треугольники *ABC* и *ADC* (лемма 1). Параллелограммы *AHEF* и *EGCK* также делятся своими диагоналями на равные треугольники: *AHE* и *AFE*, *EGC* и *EKC* (лемма 1). Но равные фигуры имеют равную площадь. Если от треугольника *ABC* отнять треугольники *AHE* и *EGC*, остатком будет параллело-

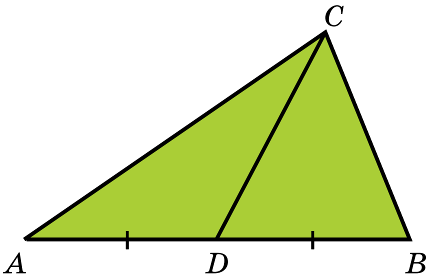


Рис. 5

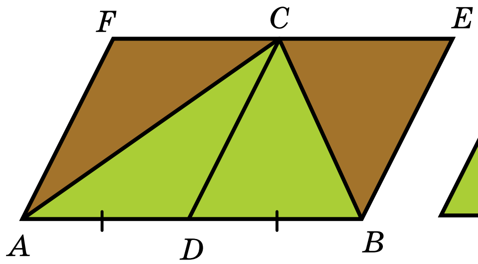


Рис. 6

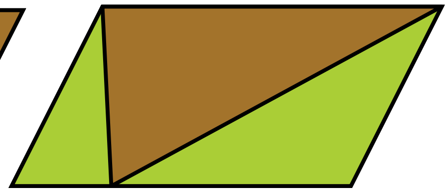


Рис. 7

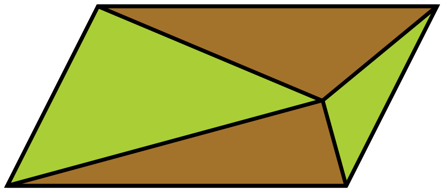
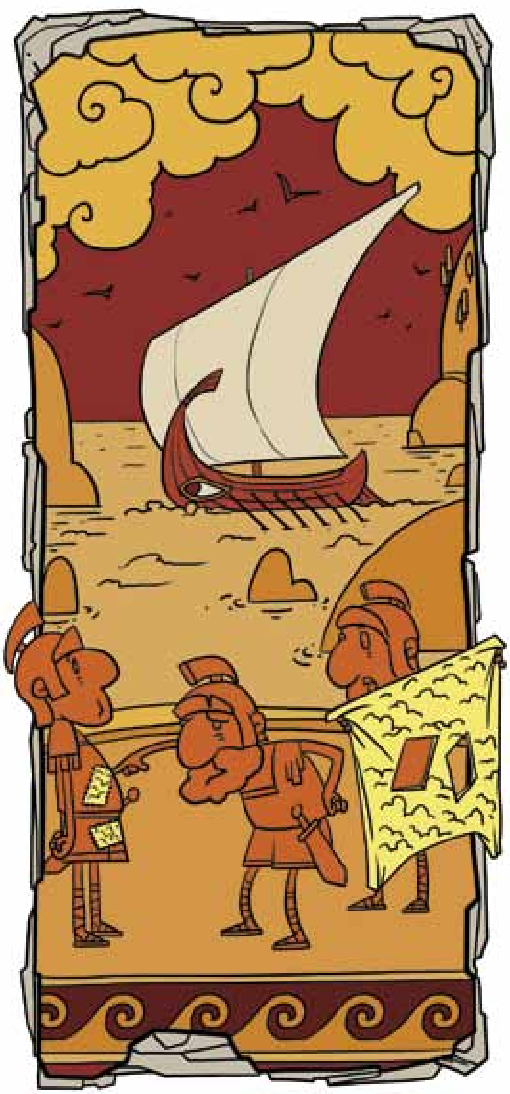


Рис. 8

грамм $HBGE$. Если от треугольника ADC отнять треугольники AFE и EKC, остатком будет параллелограмм $FEKD$. Но если от равных величин отнимаются равные величины, остатки тоже будут равны. Поэтому параллелограммы $HBGE$ и $FEKD$ равны по площади, что и требовалось доказать.

Теорема 2. *Медианой треугольника называется отрезок, соединяющий его вершину с серединой противоположной стороны. Докажите, что медиана треугольника делит этот треугольник на два треугольника равной площади* (рис. 5).

Доказательство. Сделаем дополнительное построение: проведём через концы основания AB две прямые, параллельные медиане CD; проведём через вершину C прямую, параллельную основанию A, чтобы проведённые прямые вместе с основанием AB составили параллелограмм $ABEF$ (рис. 6). Параллелограмм $ABEF$ разделён отрезком CD на два равных параллелограмма $ADCF$ и $DBEC$. По лемме 1, площадь треугольника ADC составляет половину от площади параллелограмма $ADCF$, и площадь треугольника DBC составляет половину от площади параллелограмма $DBEC$. Так что треугольники ADC и DBC равны по площади, что и требовалось доказать.



ДОКАЖИТЕ САМОСТОЯТЕЛЬНО

1. Докажите, что в чертежах, изображённых на рис. 7, 8, общая площадь фигур, окрашенных зелёным, равна общей площади фигур, окрашенных коричневым. (Придумайте такое дополнительное построение, которое сделает неочевидное равенство площадей очевидным.)

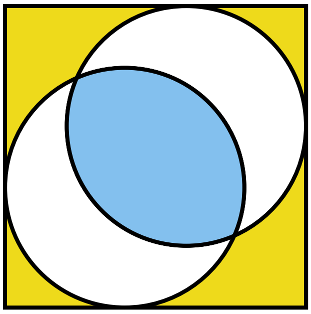


Рис. 9

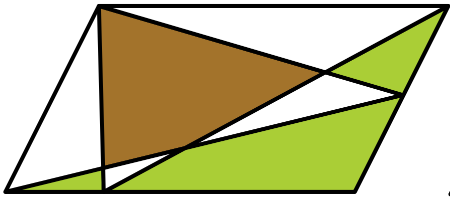


Рис. 10

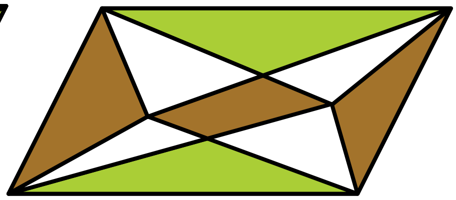


Рис. 11

2 (вспомогательная задача). Внутри квадрата расположены два круга, площадь каждого из которых составляет половину от площади квадрата (рис. 9). Докажите, что суммарная площадь частей квадрата, лежащих снаружи обоих кругов, равна площади фигуры, образованной пересечением обоих кругов.

3. Докажите, что в чертежах, изображённых на рис. 10, 11, общая площадь фигур, окрашенных зелёным, равна общей площади фигур, окрашенных коричневым. (Здесь не надо ничего строить: примените результаты предыдущих задач.)

4. В параллелограмме $ABCD$ стороны AB и BC делятся пополам точками M и N; отрезки CM и DN пересекаются в точке P (рис. 12). Докажите, что треугольник DPC и четырёхугольник $MPNB$ равны по площади. (Какое дополнительное построение здесь нужно сделать?)

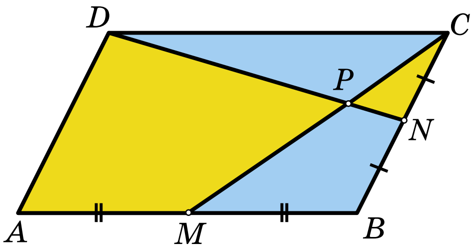


Рис. 12

5. В произвольном выпуклом четырёхугольнике стороны делятся пополам, после чего проводятся дополнительные отрезки — так, как показано на рис. 13, 14, 15. Докажите, что общая площадь фигур, окрашенных зелёным, равна общей площади фигур, окрашенных коричневым. (Как здесь можно использовать теорему о медиане треугольника?)

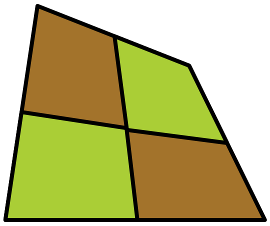


Рис. 13

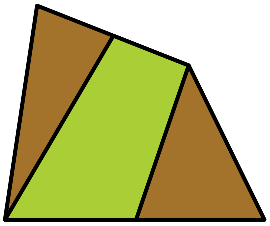


Рис. 14

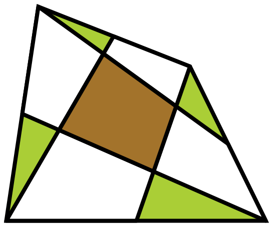


Рис. 15

6. Докажите, что любые два параллелограмма на одном основании и под одной высотой равны по площади (рис. 16). Докажите также, что любые два треугольника на одном основании и под одной высотой равны по площади (рис. 17).

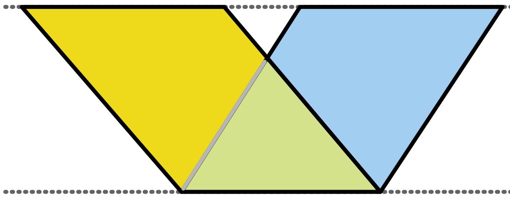


Рис. 16

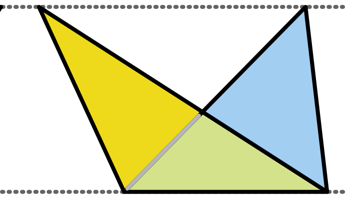


Рис. 17

7. Трапецией называется четырёхугольник, две противоположные стороны которого параллельны между собой, а две другие стороны — не параллельны. Параллельные стороны трапеции называются её основаниями, непараллельные — боковыми сторонами. В трапеции проведены две диагонали. Докажите, что получившиеся при этом треугольники, примыкающие к боковым сторонам, равны по площади (рис. 18).

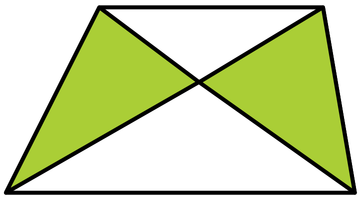
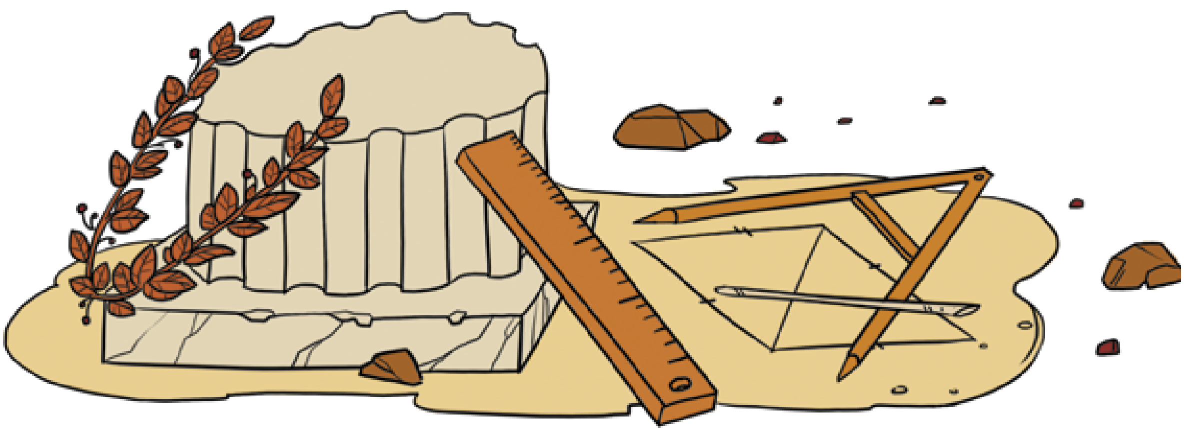


Рис. 18



Художник В. Пяткин

И. Махова

Старинные русские меры веса

«Ну, это стопудово!» – зачастую восклицаешь ты, чтобы выразить абсолютную уверенность в чём-то. А про смышлёного малыша говоришь: «Мал золотник, да дорог».

Что же это такое: пуд, золотник? Сколько это? Здесь упоминаются меры веса, которые использовались на Руси с незапамятных времён, пока их не вытеснили современные миллиграммы, граммы, килограммы, тонны. Как и в случае со старинными мерами длины, в качестве единицы измерения брались те величины веса, которые были доступны взрослому мужчине.

Например, самой первой «международной» мерой веса считается *горсть* – то количество сыпучего продукта, которое может поместиться в сложенной чашкой кисти руки. *Пригоршня* – это количество продукта, которое может поместиться в сложенные вместе кистях обеих рук. В летописях упоминается старинная русская мера небольшой вместимости *уборок* – около ежедневной порции зерна в расчете на одного взрослого человека.

Как только на Руси широко распространилась торговля, возникла необходимость взвешивать товар. Для этого использовались следующие меры веса:

- 1 берковец – 10 пудов, что соответствует 163,8 кг
- 1 пуд – 40 фунтов, что соответствует 16,38 кг
- 1 фунт (гривна) – 96 золотников, что соответствует 0,41 кг
- 1 лот – 3 золотника, что соответствует 12,8 г
- 1 золотник, что соответствует 4,27 г
- 1 доля – 1/96 золотника, что соответствует 0,044 г

ПРЕДАНЬЯ СТАРИНЫ

БЕРКОВЕЦ – большая мера веса, которая употреблялась в оптовой торговле. Она соответствовала бочке с воском, которую один взрослый мужчина мог закатить на купеческую ладью, плывущую в город Бьёркё.

ПУД – древнерусская единица веса. Упоминается, в частности, в грамоте Всеволода Мстиславича.

ФУНТ (от латинского слова «pondus» – вес, гиря). Был принят при царе Алексее Михайловиче .

ЗОЛОТНИК – так первоначально называли золотую монету. Эта мера широко применялась в ювелирном искусстве.

ЛОТ – старорусская единица измерения массы.

ДОЛЯ – самая мелкая старорусская единица измерения массы.

Также на Руси были в ходу такие меры:

КУЛЬ (ранее Мех) – мера объёма сыпучих тел различного веса.

ГАРНЕЦ («горшок» по-древнерусски). Общевосточнославянская мера сыпучих тел.

ЧЕТВЕРИК – мера ёмкости на Руси соответствовала 26,25 литра. В одном четверике 8 гарнцев.

ОСЬМИНА (осьминка) – мера сыпучих тел, равная четырём четверикам.

А теперь взвесь на домашних весах горсть гречки, пригоршню гороха и уборок риса. Сколько получилось в граммах?

Шуточный вопрос.
Что тяжелее: пуд серебра или пуд сена?

Художник В. Пяткин

ЭВАРИСТ ГАЛУА

А. Лапидус

ЭВАРИСТ ГАЛУА
Évariste Galois (фр.)
гениальный французский математик
(25.10.1811 – 31.05.1832)

Знаменитый парижский лицей Луи-ле-Гран — на сегодняшний день это один из лучших лицеев Франции.

Увидеть этот лицей сейчас можно, к сожалению, только снаружи — внутрь посторонних не пускают. Величественное старинное здание постройки XVI века тянется на весь квартал.

Если попросить любого математика перечислить величайших математиков всех времён и народов, то в первую дюжину наверняка попадёт мало известное широкой публике имя Галуа, короткая биография которого исполнена не только ранними и исключительно выдающимися математическими достижениями, но и пылким юношеским романтизмом. На карандашном портрете он изображён в возрасте пятнадцати лет.

Эварист Галуа родился 25 октября 1811 года, а погиб совсем молодым 31 мая 1832 года – ему не исполнилось и 21 года.

Мир каждого человека начинается не просто с семьи, но и с места и времени его рождения. Эварист родился и прожил свои первые 12 лет в маленьком французском городке Бур-ля-Рен в интеллигентной семье. Его отец Николя-Габриэль Галуа был активным сторонником Наполеона и возглавлял либеральную партию своего городка. В 1815 году во время Ста дней* он был избран мэром Бур-ля-Рена. Воспитанием мальчика занималась мать Аделаида-Мария Демант-Галуа. Дочь юриста, она была прекрасно образованна, благодаря чему и подготовила сына к поступлению в знаменитый парижский Королевский коллеж (ныне – лицей) Луи-ле-Гран. Воспитанниками этого лицея в своё время были драматург Мольер, писатель Гюго, политик Робеспьер, художник Делакруа.

Эваристу было 12 лет, когда он поступил в коллеж. Галуа не был отличником, хотя учителя отмечали его незаурядные способности. Первые три года программа обучения была в основном гуманитарная. Осенью 1826 года Галуа перешёл в старший класс коллежа (класс риторики), но у него появились признаки утомления, и в январе 1827 года, по рекомендации директора, он вернулся на повторный курс. Одновременно он поступил в подготовительный математический класс. Именно тогда пятнадцатилетний юноша, скучавший на всех уроках, запойно увлёкся математикой, и не просто увлёкся, а всерьёз самостоятельно изучил её в объёме, далеко выходящем за рамки школьной программы. Проглотив сначала «Основы геометрии» Лежандра, он вслед изучил на одном дыхании не больше и не меньше, как фундаментальные работы Лагранжа: «Решение численных уравнений», «Теория аналитических функций» и «Лекции по теории функций». Даже сейчас, спустя почти 200 лет, эти предметы изучаются только в университетах.

В октябре 1827 года Эварист вернулся в класс риторики, продолжая занятия в математическом классе. Математика (одна, но пламенная страсть!) перевернула мир подростка, захватив его целиком, – вся остальная учёба отошла на задний план.

Его жажда знаний и интерес к математике не были систематическими – увлечённость была иного, более высокого порядка, вне принятых тогда требований. Видимо, поэтому он дважды провалился именно по математике при поступлении в Политехнический институт (École Polytechnique) – самое престижное по тем временам высшее учебное заведение Франции. В первый раз, в 1828 году, он

*Вторичное правление Наполеона (20 марта – 22 июня 1815 г.) после его бегства с острова Эльба.

поступал досрочно, за год до окончания коллежа. Нервный юноша, живущий напряжённой интеллектуальной жизнью, не научился соответствовать строго упорядоченным требованиям и не сумел дать подробных объяснений на устном вступительном экзамене.

Галуа возвращается в порядком надоевший ему коллеж и поступает в специальный математический класс (перескочив основной). Через год он публикует свою первую статью «Доказательство одной теоремы о периодических непрерывных дробях».

Именно тогда (под влиянием работ Лагранжа) он начал заниматься одной из самых трудных математических проблем того времени – проблемой разрешимости алгебраических уравнений в радикалах. Свои первые результаты Галуа послал в Академию наук. Рассмотреть его работу взялся прославленный Огюстен-Луи Коши, один из крупнейших французских математиков, но… где-то её затерял.

В 1829 году перед вторичным экзаменом в Политехнический институт в семье Галуа произошла трагедия: отец мальчика, затравленный местным кюре и иезуитами, покончил с собой. И Эварист снова провалился на вступительном экзамене, на этот раз отказавшись следовать порядку изложения, предложенному экзаменатором. Он, по-видимому, просто вспылил – по его представлениям, экзаменатор не соответствовал своей квалификации. В результате пришлось довольствоваться менее престижным Педагогическим институтом, известным теперь под именем Высшей нормальной школы (École normale supérieure).

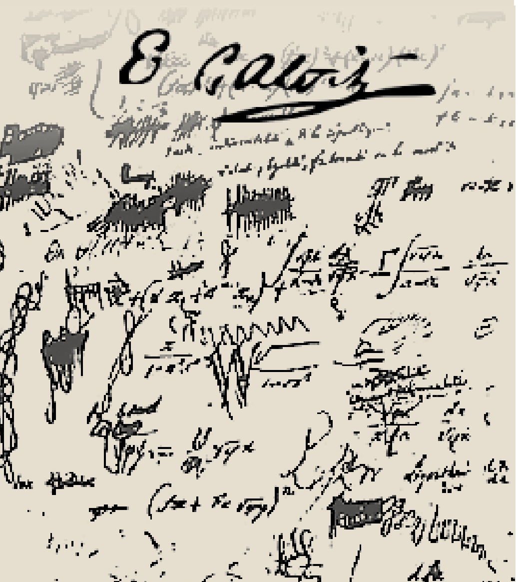
Между тем Эварист активно работает – посылает Коши продолжение своих исследований в теории уравнений, но обнаруживает, что они частично пересекаются с результатами Абеля – молодого норвежского математика, тоже увлечённого этой проблемой. Чуть позже, подробнее ознакомившись с трудами Абеля и Якоби, он займётся эллиптическими функциями и абелевыми интегралами, опубликовав на этот предмет несколько оригинальных работ. А пока расширяет статью и представляет новую версию на конкурс Академии, передав её секретарю Академии – Жану-Батисту Фурье. Госпожа Удача вновь отворачивается от Галуа – Фурье умирает, не успев представить рукопись. Её не находят в бумагах покойного. Премия Академии достаётся Абелю и Якоби. Как позже выяснилось, Эварист Галуа в качестве претендента даже не рассматривался.

Июльская революция 1830 года – Париж кипит. А студенты Нормальной школы сидят взаперти по приказу директора. Радикально настроенный Галуа пишет письмо в газету, публично обвиняя директора в предательстве, за что немедленно исключается из школы. Он тут же вступает в ряды Артиллерии Национальной гвардии (республиканское подразделение милиции), но ненадолго: уже в канун нового 1831 года Артиллерия была распущена по королевскому декрету.

Педагогический институт, известный теперь как Высшая нормальная школа (École normale supérieure)

ЭВАРИСТ ГАЛУА

«Свобода на баррикадах» («La Liberté guidant le peuple») картина знаменитого французского художника Эжена Делакруа (Eugene Delacroix) написана по мотивам июльской революции 1830 г.



Время ускоряет свой бег, когда он по столь свойственному ему нетерпению чувств дважды попадает в тюрьму. В первый раз – на месяц, в мае 1831, из-за высказывания против короля Луи Филлипа. А вторично – 14 июля того же года: в день взятия Бастилии он явился в запрещённой форме артиллериста Национальной гвардии, к тому же вооружённый до зубов. Эта дерзкая, в сущности, детская выходка обошлась ему в целых восемь месяцев тюрьмы. В тюрьме он продолжает интенсивно заниматься математикой, хотя снова получает отрицательный отзыв на свою очередную работу, на этот раз от Пуассона, ссылающегося на недостаточную ясность и незавершённость изложения. Тогда же Галуа в момент отчаяния пытается заколоть себя кинжалом, но сокамерники спасают его.

В марте 1832 года в Париже разразилась эпидемия холеры. Не миновала она и тюрьмы, где содержался Эварист Галуа. Заключённых перевели в парижскую частную лечебницу Фолтрие, где Эварист познакомился с дочерью доктора дю Мотель Стефанией. Дальнейшие обстоятельства их отношений не ясны. Известно только, что после освобождения 29 апреля Эварист получил два письма, в которых она решительно отказывает ему.

Причина и подробности роковой дуэли 30 мая туманны – возможно, причиной были политические мотивы, хотя оба дуэлянта были республиканцами-единомышленниками, а может, была замешана женщина. Известно только, что смертельно раненый Галуа был обнаружен прохожим – на месте не было ни секундантов, ни соперника. Его тут же отправили в госпиталь, где на следующий день, 31 мая, он скончался.

В ночь накануне дуэли Галуа в письме своему другу Шевалье торопливо изложил последние полученные им результаты – ссылаясь на три статьи с более подробным содержанием, возможно, целиком или частично написанными тогда же. Две статьи были найдены и только через 15 лет опубликованы – они и содержали главные открытия Галуа. А третья упомянутая в письме статья пропала.

В прошлом году исполнилось 200 лет со дня рождения Эвариста Галуа. Интересно, что в Париже, где принято называть улицы именами учёных, нет улицы с его именем. Есть улица Галуа в Бурля-Рене, но она названа в честь его отца-мэра. Такая вот фатальная несправедливость – после смерти, как и при жизни.

Справедливость восторжествовала, однако, в математическом сообществе. Эварист Галуа, занимаясь математикой всего пять лет, не просто полностью ответил на вопрос, три века бывший вызовом всем математикам мира. Он создал уникальный метод, центральное место в котором занимают понятия группы и симметрии. Идеи Галуа оказались плодотворными во всех областях математики и теоретической физики – от абстрактной алгебры до теории элементарных частиц. За всю многовековую историю математики не было иного примера, чтобы столь малая по объёму работа оказала такое огромное влияние.

ОТВЕТЫ, УКАЗАНИЯ, РЕШЕНИЯ к №1 за 2012 год

ПРИКЛЮЧЕНИЯ СО СТРЕЛКАМИ

Минутная стрелка делает за сутки 24 оборота, а часовая – два (последние обороты завершаются как раз к началу новых суток). Стрелка, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелками, движется со средней скоростью, и значит, сделает среднее число оборотов, то есть $(24+2)/2=13$.

Можно было рассуждать и по-другому. Если считать часовую стрелку неподвижной, минутная обернётся вокруг неё $24-2=22$ раза. Тогда стрелка, делящая пополам угол между часовой и минутной стрелками, сделает половинное число оборотов вокруг часовой, то есть 11. Прибавляя два оборота часовой стрелки, получаем итоговый ответ: 13 оборотов.

ВЁДРА

Скошенные вёдра можно вставлять друг в друга, при этом стопка занимает мало места и удобна для транспортировки и хранения. По аналогичному принципу делают одноразовые стаканчики для напитков, корзины и тележки в супермаркетах, офисные стулья.

УДИВИТЕЛЬНЫЕ ЧИСЛА

Объясним решение на примере для $n=5$. Рассмотрим квадрат 5×5. Он состоит из 25 клеток, потому что в нём 5 рядов по 5 клеток. Но можно посчитать число клеток другим способом – по диагоналям (рис. 1). В первой диагонали 1 клетка, во второй – 2, в третьей – 3, в четвёртой – 4, в пятой – 5, в шестой – снова 4, в седьмой – 3, и так далее, в последней – 1 клетка. Значит, число клеток в квадрате равно $1+2+3+4+5+4+3+2+1$, и эта сумма равна 25. Если мы нарисуем квадрат $n\times n$ и сосчитаем число клеток в нём по диагоналям, то докажем утверждение задачи.

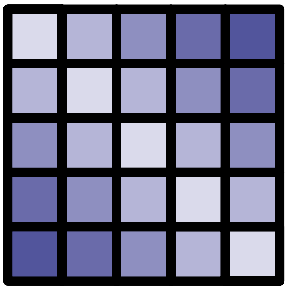


Рис. 1

ЛИСТ МЁБИУСА

1. Если разрезать лист Мёбиуса вдоль, отступив треть от края, получатся два сцепленных кольца. Одно такое же, как исходное, только в три раза тоньше. Второе тоже в три раза тоньше, но ещё и длиннее в два раза и закрученное на 360° (полный оборот).

2. Если у нарисованной на рисунке 2 модели продолжить разрез вдоль всего листа, получится кольцо, закрученное на 720°.

3. Если закрутить полоску на 360° и разрезать её по центральной линии, получатся два сцепленных кольца половинной ширины, каждое из которых также закручено на 360°.

4. При разрезании двух склеенных листов Мёбиуса могут получиться два разных результата – либо два сцепленных «сердечка» (рис. 3), либо два отдельных (рис 4). Это зависит от того, как были закручены листы Мёбиуса – в одну и ту же сторону или в разные.

А вы заметили, что на рисунках 9 (значок мехмата) и 11 (памятник) из статьи изображены не совсем листы Мёбиуса: перекручивание сделано на три полуоборота!

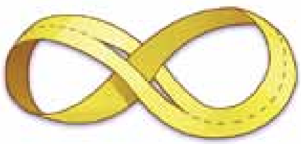


Рис. 2

Рис. 3

Рис. 4

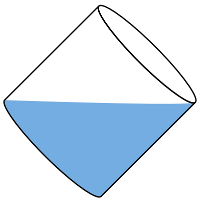


Рис. 5

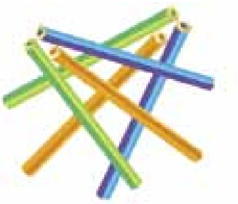


Рис. 6

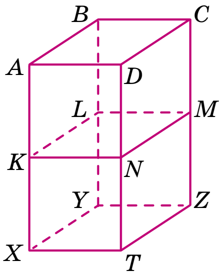


Рис. 7

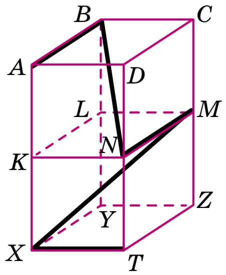


Рис. 8

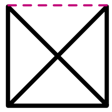


Рис. 9

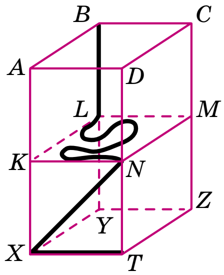


Рис. 10

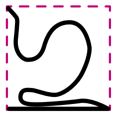


Рис. 11

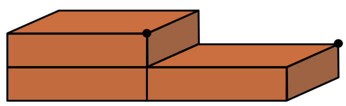


Рис. 12

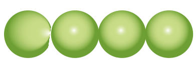


Рис. 13

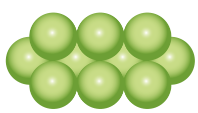


Рис. 14

СТЕРЕОМЕТРИЯ ДЛЯ ВСЕХ

1. Наберём сначала полную кастрюлю, а потом отольём лишнее: будем наклонять кастрюлю до тех пор, пока не покажется дно (рис. 5).

2. На одну стирку – ведь из восьми таких кусков как раз можно составить исходный кусок!

3. Пример изображён на рисунке 6.

4. Из условия ясно, что аквариум имеет вид параллелепипеда размерами $1 \times 1 \times 2$ (рис. 7). Будем считать, что рыбка плыла сверху вниз.

а) Посмотрите на рисунок из условия задачи. Из его левой части видно, что рыбка начала свой путь где-то на ребре AB параллелепипеда, а из его правой части тогда понятно, что сначала рыбка просто проплыла от A до B по ребру AB. Далее видим, что рыбка поплыла по прямой в точку N, затем проплыла отрезок NM, после поплыла напрямую в точку X и, наконец, проплыла ребро XT. Итоговый путь рыбки изображён на рисунке 8. Теперь нетрудно нарисовать и вид пути сверху (рис. 9).

б) Посмотрите на рисунок из условия задачи. Видно, что рыбка выплыла из точки B параллелепипеда и проплыла отрезок BL. Далее поплыла в точку N, но не обязательно по прямой – она могла плыть совершенно произвольно, лишь оставаясь всё время в плоскости $KLMN$. Из точки N рыбка поплыла напрямую в точку X, а затем проплыла ребро XT. Один из возможных путей рыбки изображён на рисунке 10. Нетрудно нарисовать и вид этого пути сверху (рис. 11).

5. Нет, поскольку горлышки у них одинакового размера!

6. У второго и третьего. А вот первый кубик получить из такой развертки нельзя – у склеенного из развертки кубика грани с белым и коричневым кружками будут противоположными, а не соседними.

7. Тяжелее шар радиуса 8 см.

8. Положим кирпичи так, как показано на рисунке 12: два кирпича один на другой, и третий кирпич впритык к нижнему из первых двух. Над третьим кирпичом образуется пустое место, имеющее форму кирпича. Отмеченные на рисунке точки – противоположные вершины этого воображаемого кирпича, и ничто не мешает приложить к ним линейку и измерить расстояние между ними. Это и будет длина диагонали кирпича.

9. а) Возьмём три одинаковых шара, положим их на стол и сдвинем так, чтобы любые два касались друг друга (точки их касания со столом образуют при этом равносторонний треугольник со стороной, равной удвоенному радиусу шара). Затем положим еще один такой же шар сверху на эти три шара так, чтобы он коснулся остальных.

б) Возьмём пирамидку из четырёх шаров, построенную в предыдущем пункте. Поместим в центр этой пирамидки маленький шарик и будем раздувать его, пока он не коснётся всех четырёх шаров пирамидки. Такой момент обязательно наступит, и касание будет сразу со всеми шарами пирамидки из-за её симметричности.

10. Положим на стол одну цепочку из четырёх шариков (рис. 13), сверху на неё положим прямоугольник из шести шариков так, как показано на рисунке 14, сверху положим второй прямоугольник, развернув его перпендикулярно первому (рис. 15), и, наконец, сверху положим вторую цепочку из четырёх шариков, также развернув перпендикулярно первой цепочке (рис. 16). Пирамида готова! Очень рекомендуем сделать такие цепочки и прямоугольники из шариков своими руками и проверить решение.

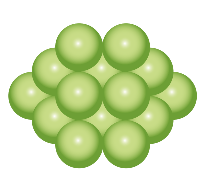


Рис. 15

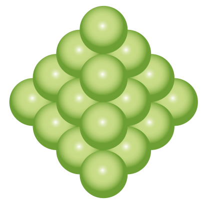


Рис. 16

ЗАДАЧА ЛЬВА ТОЛСТОГО

Соседка не понесла никакого убытка. Мальчик ни за что (фальшивая банкнота не в счёт) получил десятирублёвую шапку и 15 рублей. Значит, именно столько (25 рублей) и потерял продавец.

КАТЕТ РАВЕН ГИПОТЕНУЗЕ

В этой задаче самое главное – нарисовать аккуратный рисунок. Тогда сразу будут видны ошибки в рассуждениях.

Во-первых, точка O пересечения биссектрисы угла A с серединным перпендикуляром к BC лежит не внутри треугольника ABC, а вне его! (Знатоки геометрии могут доказать, что O – середина дуги BC описанной окружности.)

Во-вторых, раз точка O оказалась вне треугольника ABC, то и перпендикуляры на стороны треугольника могут падать не на сами стороны, а на их продолжения. Как видно из аккуратного рисунка, один перпендикуляр попадает на продолжение катета AC, а второй – на гипотенузу AB.

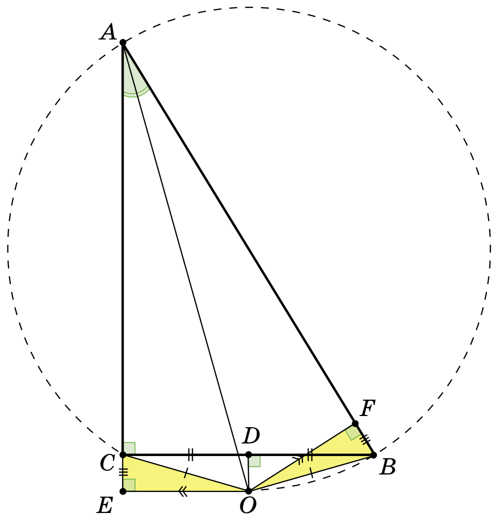


Рис. 17

Все рассуждения про равенства треугольников остаются в силе. По-прежнему $AE = AF$ и $CE = BF$. Но теперь $AB = AF + BF$, а $AC = AE - CE$. Противоречие ликвидировано!

Докажите сами, что оба перпендикуляра из точки O не могут попасть на продолжения сторон (то есть они расположены именно так, как показано на рисунке).

ГДЕ РУЛЬ?

В машине на рисунке симметрично всё, кроме… зеркал! Одно из них наклонено под бóльшим углом к кузову, чем другое.

Лучи света, отражаясь от предметов, попадают нам в глаза, благодаря чему мы и видим эти предметы. Водитель должен видеть в зеркале дорогу за собой. То есть лучи, идущие из-за машины (слева и справа), должны отразиться в зеркалах и попасть водителю в глаза. Точка пересечения лучей, отраженных от первого зеркала и от второго, покажет нам примерное расположение головы водителя.

Чтобы понять, как лучи отражаются от зеркал, воспользуемся известным фактом: угол падения луча на зеркало равен углу отражения. На рисунке 18 это означает, что закрашенные одинаковым цветом углы равны. По расположению точки пересечения лучей видно, что водитель сидит слева.

Попробуйте понять, что увидел бы водитель в таких зеркалах, если бы сидел справа.

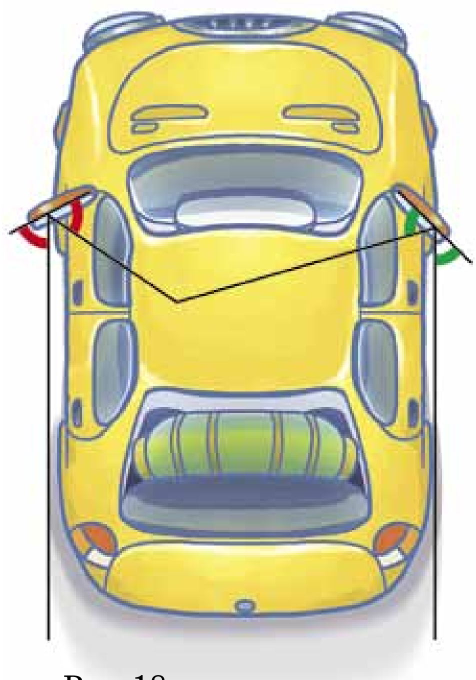


Рис. 18

НАШ КОНКУРС

Приглашаем всех попробовать свои силы в нашем конкурсе.

Высылайте решения задач, с которыми справитесь, не позднее 15 апреля по электронной почте **kvantik@mccme.ru** или обычной почтой по адресу **119002, Москва, Б.Власьевский пер., д.11, журнал «Квантик».**

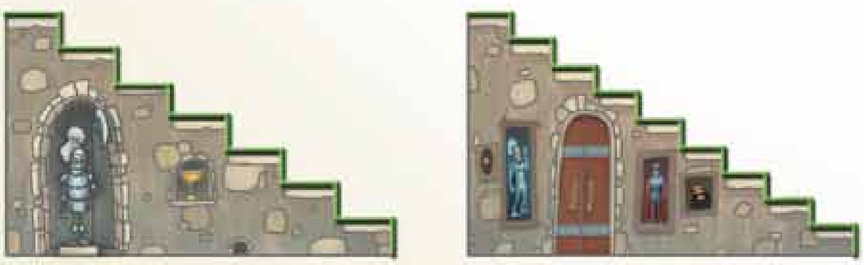
Задачи конкурса печатаются в каждом номере, итоги будут подведены в конце года. Победителей ждут дипломы журнала «Квантик», научно-популярные книги, диски с увлекательными математическими мультфильмами.

Желаем успеха!

II ТУР

6. В 2010 году в школе № 1 доля мальчиков равнялась 50%, а в школе № 2 – 80%. В 2011 году в каждой из школ доля мальчиков не изменилась, однако в двух школах вместе доля мальчиков стала больше, чем в 2010 году. Приведите пример, как такое могло произойти.

7. Две каменные лестницы одинаковой высоты 1 м и с одинаковым основанием длины 2 м покрыты ковровыми дорожками. У первой лестницы 7 ступенек, а у второй – 9 (см. рисунок). Хватит ли дорожки, покрывающей первую лестницу, для покрытия второй?



Зеленая линия показывает, как ковровая дорожка прилегает к лестнице

наш КОНКУРС

Авторы задач:
А. Ковальджи (6),
Л. Штейнгарц (8),
И. Акулич (10)

8. В слове КВАНТИК каждую букву заменили некоторой цифрой. Причём одинаковые буквы (то есть две буквы К) были заменены одинаковыми цифрами, а разные – разными.

При этом оказалось, что выполняется следующее равенство:

$$КВ^{А} = НТИК$$

Чему равно число КВАНТИК?

9. Можно ли так расставить фишки на клетках доски 8×8 (в каждой клетке – не более одной фишки), чтобы на любых двух вертикалях фишек было поровну, а на любых двух горизонталях – не поровну?

10. Аптечный парадокс.

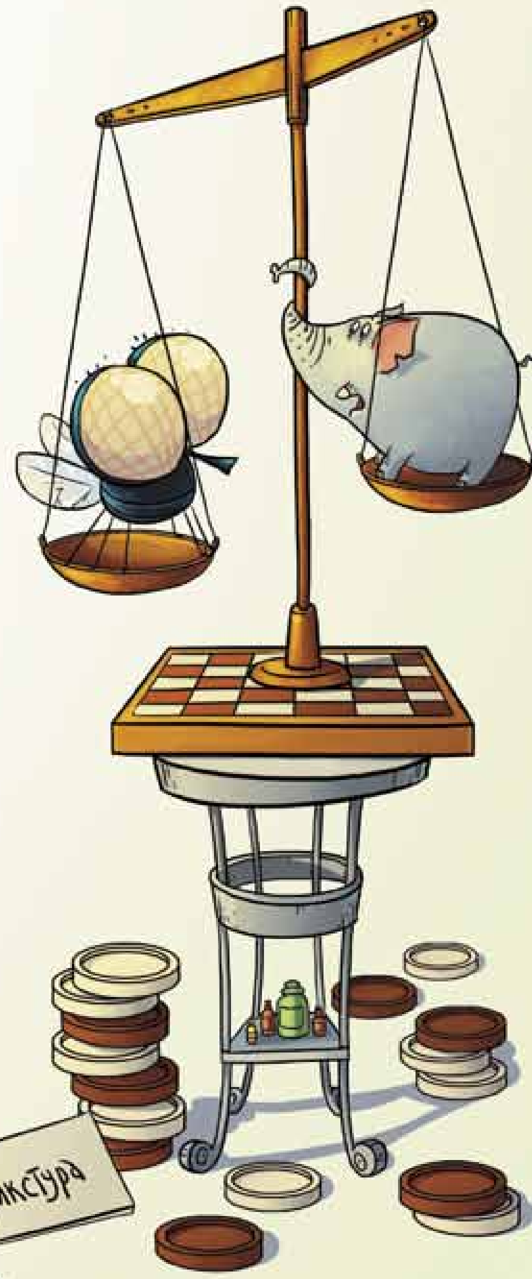
– Купил я недавно новенькие двухчашечные аптечные весы с набором гирь и разновесок, – рассказывал один аптекарь другому. – Взвесил на них пузырёк с микстурой, и выяснилось, что он весит 50 граммов. А когда взвесил сразу два таких же пузырька, их вес составил 64 грамма.

– Как же так? – удивился собеседник.

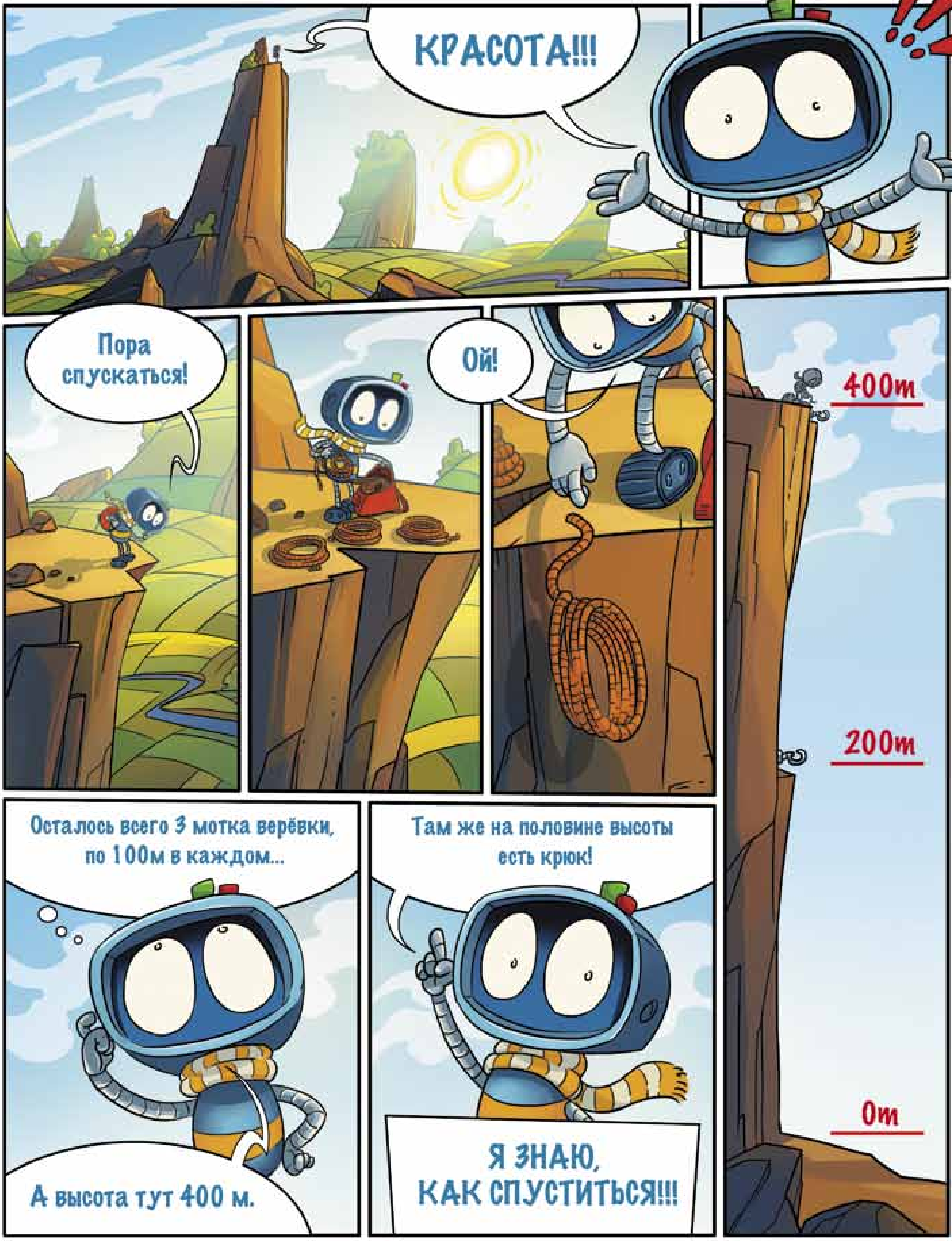
– Всё очень просто! Весы оказались неравноплечими...

Сколько же на самом деле весит пузырёк с микстурой?

Подсказка: неравноплечие весы увеличивают вес на одной из чашек относительно другой в одно и то же число раз (равное отношению длин плеч весов).



Художник: В.Пяткин



Художник В. Пяткин